СОЗДАНИЕ ПД РЕГУЛЯТОРА ДЛЯ КВАДРОКОПТЕРА

THE CREATION OF A PD CONTROLLER FOR THE QUADCOPTER

УДК-608

Бухтояров Игорь Вячеславович, студент Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана, Россия, г. Москва

Кошкина Ирина Николаевна, студентка Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана, Россия, г. Москва

Bukhtoyarov Igor Vyacheslavovich

Irina Koshkina, irinakoshkina9@mail.ru

Аннотация

Целью работы стало создание модели квадрокоптера и ПД регулятора для его управления. Эта задача включала в себя создание системы управления беспилотного летательного аппарата, способного проходить заранее созданный маршрут, состоящий из набора контрольных точек, связанных между собой прямыми участками. Задача была успешно решена и реализована в среде Matlab без использования специализированных библиотек.

Annotation

The aim of the work was to create a model of a quadcopter and a PD controller for its control. This task included creating a control system for an unmanned aerial vehicle capable of passing a pre-created route consisting of a set of control points connected by straight sections. The problem was successfully solved and implemented in the Matlab environment without using specialized libraries.

Ключевые слова: ПД регулятор, математическая модель в Matlab, теория управления, квадрокоптер, motion planning.

Keywords: PD controller, mathematical model in Matlab, control theory, quadcopter, motion planning.

Пропорционально-дифференцирующий (ПД) регулятор — устройство в управляющем контуре с обратной связью. Используется в системах автоматического управления для формирования управляющего сигнала с целью получения необходимых точности и качества переходного процесса.

Сначала необходимо составить системную модель квадрокоптера (рис. 1).

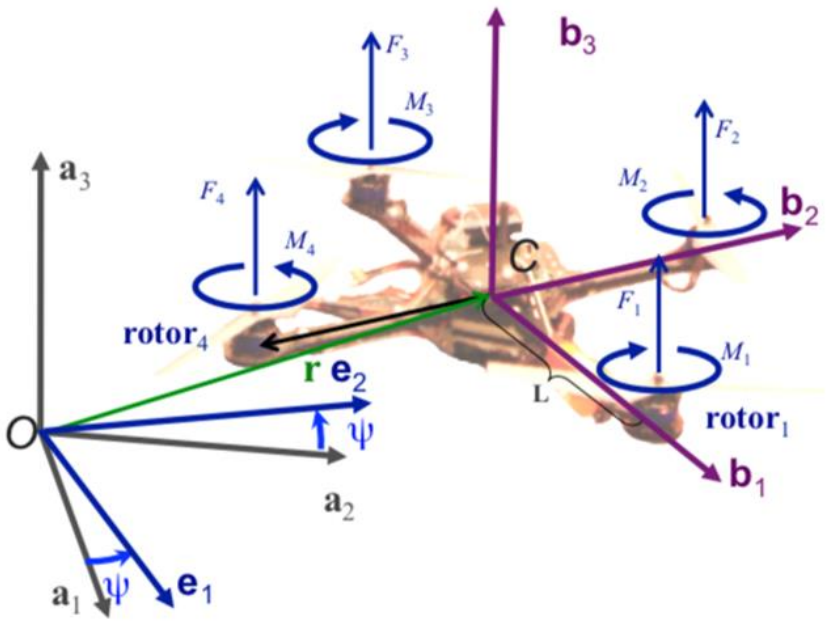


Рисунок 1. Модель квадрокоптера с инерциальной и связанной системой координат

Системы координат и диаграмма свободного тела для квадрокоптера показаны на рис. 1. Инерциальная система отсчета A определяется осями a1, a2 и a3 вокруг начала координат (O). Рама корпуса B прикреплена к центру масс квадрокоптера, причем b1 совпадает с предпочтительным направлением движения вперед, а b3 перпендикулярно плоскости роторов, направленных вертикально вверх во время идеального зависания (см. рис. 1). Эти векторы параллельны главным осям. Центром масс является C. Ротор 1 находится на

расстоянии L вдоль b1, 2 - на L вдоль b2, а 3 и 4 - аналогично L вдоль отрицательных b1 и b2 соответственно.

Каждый ротор имеет угловую скорость ω_i и создает вертикальную силу F_i в соответствии с

$$F_i = k_F \omega_i^2 \quad (1)$$

Эксперименты с неподвижным ротором в стационарном состоянии показывают, что $k_F = 6.11 \cdot 10^{-8}$ [Н / (об/мин)^2]. Роторы также производят момент в соответствии с

$$M_i = k_M \omega_i^2 \quad (2)$$

Константа k определяется как приблизительно $k_M \approx 1.5 \cdot 10^{-9}$ [Н / (об/мин)^2] путем сопоставления производительности от симуляции до реальной системы.

Для моделирования вращения квадрокоптера в абсолютной системе отсчета используются углы Эйлера Z - X – Y. Чтобы попасть из A в B, нужно совершить поворот вокруг a3 на угол рысканья ψ, чтобы получить триаду ei. Вращение вокруг e1 на угол крена φ приводит к триаде fi. Третье вращение вокруг f2 на θ приводит к триаде bi с фиксированным телом. Для преобразования компонентов векторов B в компоненты векторов в A понадобится матрица вращения:

$$\prescript{A}{}[R]_B = \begin{bmatrix} cos\psi cos\theta - sin\varphi sin\psi sin\theta & -cos\varphi sin\psi & cos\psi sin\theta + cos\theta sin\varphi sin\psi \\ cos\theta sin\psi + cos\psi sin\varphi sin\theta & cos\varphi cos\psi & sin\psi sin\theta - cos\psi cos\theta sin\varphi \\ -cos\varphi sin\theta & sin\varphi & cos\varphi cos\theta \end{bmatrix} \quad (3)$$

Компоненты угловой скорости квадрокоптера в связанной системе обозначим через p, q и r:

$$\prescript{A}{}\omega_B = pb_1 + qb_2 + rb_3$$

Эти значения связаны с креном тангажом и рысканьем:

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & 0 & -cos\varphi sin\theta \\ 0 & 1 & sin\varphi \\ sin\theta & 0 & cos\varphi cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Для записи уравнения движения Ньютона обозначим через r вектор положения C в A. Силами в системе являются гравитация в направлении −a3 и силы от каждого из роторов Fi в направлении b3. Уравнения, управляющие ускорением центра масс:

$$m\ddot{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix} + R \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_1 + F_2 + F_3 + F_4 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Тогда первым входным сигналом будет $u_1 = \sum_{i=1}^{4} F_i$

В дополнение к силам, каждый ротор создает момент, перпендикулярный плоскости вращения лопасти, Mi. Роторы 1 и 3 вращаются в направлении −b3, а 2 и 4 вращаются в направлении +b3. Поскольку момент, создаваемый на квадрокоптере, противоположен направлению вращения лопастей, M1 и M3 действуют в направлении b3, а M2 и M4 действуют в направлении -b3. L – расстояние от оси вращения роторов до центра масс квадрокоптера.

Угловое ускорение по уравнению движения Эйлера:

$$I \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L(F_2 - F_4) \\ L(F_3 - F_1) \\ M_1 - M_2 + M_3 - M_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times I \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (6)$$

Перепишем это уравнение в виде:

$$I \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & L & 0 & -L \\ -L & 0 & L & 0 \\ \gamma & -\gamma & \gamma & -\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times I \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}, \quad (7)$$

где $\gamma = \frac{k_M}{k_F}$.

Соответственно, можно определить второй набор входных данных как вектор моментов u2:

$$u_2 = \begin{bmatrix} 0 & L & 0 & -L \\ -L & 0 & L & 0 \\ \gamma & -\gamma & \gamma & -\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix}$$

Угловое ускорение определяется уравнением Эйлера как:

$$I_{xx}\ddot{\phi} = L(F_1 - F_2) = u_2.$$

Контроллеры получим путем линеаризации уравнений движения и моделей двигателей (5 - 2) в рабочей точке, которая соответствует номинальному состоянию зависания, r = r0, θ = φ = 0,$\psi = \psi_0, \dot{r} = 0$ и $\dot{\phi} = \dot{\psi} = \dot{\theta} = 0$.

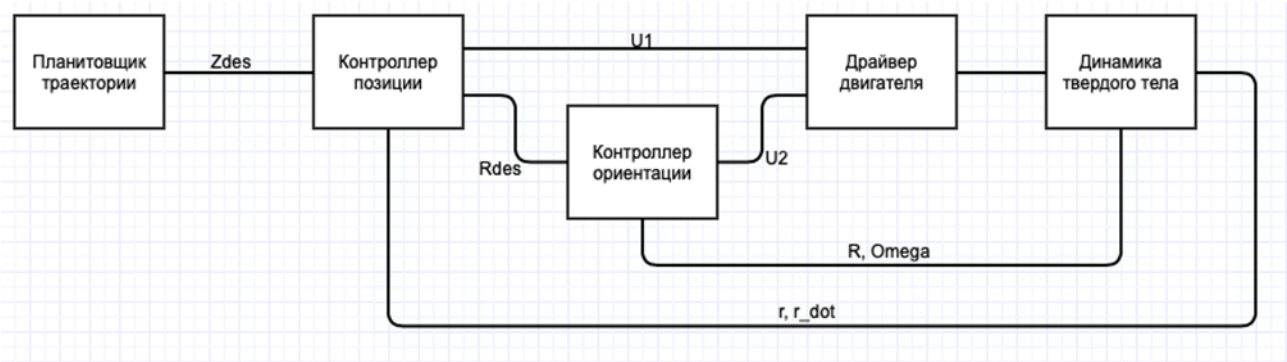


Рисунок 2. Схема САУ квадрокоптера

В таком состоянии подъемную силу от пропеллеров будем считать $F_{i,0} = \frac{mg}{4}$

Тогда номинальные значения при зависании будут $u_{1,0} = mg$, $u_{2,0} = 0$

Исходя из этого линеаризация (5) дает:

$$\begin{aligned} \ddot{r}_1 &= g(\Delta\theta cos\psi_0 + \Delta\phi sin\psi_0) \\ \ddot{r}_2 &= g(\Delta\theta sin\psi_0 - \Delta\phi cos\psi_0) \\ \ddot{r}_3 &= \frac{1}{m}u_1 - g \end{aligned} \tag{8}$$

Линеаризация (6) дает:

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = I^{-1} \begin{bmatrix} 0 & L & 0 & -L \\ -L & 0 & L & 0 \\ \gamma & -\gamma & \gamma & -\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Предположим, что конструкция квадрокоптера симметрична, поэтому Ixx = Iyy, тогда получаем:

$$\dot{p} = \frac{u_{2,x}}{I_{xx}} = \frac{L}{I_{xx}}(F_2 - F_4)$$

$$\dot{q} = \frac{u_{2,y}}{I_{yy}} = \frac{L}{I_{yy}}(F_3 - F_1)$$

$$\dot{r} = \frac{u_{2,z}}{I_{zz}} = \frac{\gamma}{I_{zz}}(F_1 - F_2 + F_3 - F_4)$$

Другими словами, уравнения движения отделены от угловых ускорений. Каждый компонент углового ускорения зависит только от соответствующего компонента u2.

Задача управления состоит в том, чтобы определить четыре входа, {u1, u2}, необходимые для зависания или следования по желаемой траектории, z_{des}. Как показано на рисунке 2, используем сигнал ошибки в позиции робота, чтобы вывести уравнения контроллера положения из (8), который напрямую определяет u1. Модель в (8) также позволяет получить желаемую ориентацию. Регулятор ориентации получен из модели в (9).

Преобразование входов в {u1, u2} является простым. Внутренний контур управления ориентацией использует встроенные акселерометры и гироскопы для управления креном, тангажом и рысканием и работает на частоте приблизительно 1 кГц, а внешний контур контроля положения использует оценки положения и скорости центра масс для управления траекторией в трех Представим регулятор ориентации с пропорциональной плюс дифференциальной (ПД) составляющей для отслеживания траектории в трехмерном пространстве, заданной с точки зрения желаемого крена, тангажа и угла рыскания. Поскольку разработка контроллера основана на линеаризованных уравнениях движения, отношение должно быть близко к номинальному состоянию при наведении, когда углы крена и тангажа малы.

Вблизи номинального состояния зависания законы пропорционального и производного управления имеют вид:

$$u_2 = \begin{bmatrix} k_{p,\varphi}(\phi_{des} - \varphi) + k_{d,\varphi}(p_{des} - p) \\ k_{p,\theta}(\theta_{des} - \theta) + k_{d,\theta}(q_{des} - q) \\ k_{p,\psi}(\psi_{des} - \psi) + k_{d,\psi}(r_{des} - r) \end{bmatrix} \quad (10)$$

Далее рассмотрим два метода управления положением, которые используют углы крена и тангажа в качестве входных данных для управления положением квадрокоптера. В обоих методах алгоритм управления положением будет определять желаемые углы крена и тангажа θ_{des} и ϕ_{des}, которые можно использовать для вычисления желаемых скоростей из (10). Первый контроллер используется для удержания или поддержания положения в требуемом векторе положения r_0. Второй отслеживает заданную траекторию $r_T(t)$ в трех измерениях. В обоих случаях желаемый угол рыскания задается независимо. Это

может быть либо константа, ψ_0, либо величина, изменяющаяся во времени, $\psi_T(t)$. Предположим, что желаемая траектория $z_{des} = \begin{bmatrix} r_T(t) \\ \psi_T(t) \end{bmatrix}$ будет предоставлена планировщиком траектории в качестве входных данных для указания траектории вектора положения и угла рыскания, который нужно отследить.

Для зависания $r_T(t) = r_0$ и $\psi_T(t) = \psi_0$. Командные ускорения $\ddot{r}_{i,des}$ вычисляются ПД контроллером. Определим ошибку, используя компоненты системы координат А:

$$e_i = (r_{i,T} - r_i)$$

Чтобы гарантировать, что эта ошибка экспоненциально стремится к нулю, требуется:

$$(\ddot{r}_{i,T} - \ddot{r}_{i,des}) + k_{d,i}(\dot{r}_{i,T} - \dot{r}_{i,des}) + k_{p,i}(r_{i,T} - r_{i,des}) = 0, \qquad (11)$$

где для зависания $\dot{r}_{i,T} = \ddot{r}_{i,T} = 0$.

Из (8) мы можем получить связь между желаемыми ускорениями, креном и точками. Пусть дано $\Delta\theta = \theta - \theta_0 = \theta$ и $\Delta\phi = \phi - \phi_0 = \phi$, тогда мы можем записать:

$$\ddot{r}_1 = g(\theta_{des} cos\psi_T + \phi_{des} sin\psi_T)$$
$$\ddot{r}_2 = g(\theta_{des} sin\psi_T + \phi_{des} cos\psi_T)$$
$$\ddot{r}_3 = \frac{1}{m} u_1 - g$$

Для парения в воздухе последнее уравнение дает:

$$u_1 = mg + m\ddot{r}_{3,des} = mg - m(k_{d,3}\dot{r} + k_{p,3}(r_3 - r_{3,0})) \qquad (13)$$

Два других уравнения могут быть использованы для вычисления желаемых углов крена и тангажа для контроллера ориентации:

$$\phi_{des} = \frac{1}{g}(\ddot{r}_{1,des} sin\psi_T - \ddot{r}_{2,des} cos\psi_T) \qquad (14а)$$

$$\theta_{des} = \frac{1}{g}(\ddot{r}_{1,des} cos\psi_T - \ddot{r}_{2,des} sin\psi_T) \qquad (14б)$$

Желаемые скорости крена и тангажа принимаются равными нулю.

$$p_{des} = 0 \quad (15а)$$

$$q_{des} = 0 \quad (15б)$$

Поскольку рыскание $\psi_T(t)$ задается независимо генератором траекторий, получаем:

$$\psi_{des} = \psi_T(t) \quad (16а)$$

$$r_{des} = \dot{\psi}_T(t) \quad (16б)$$

Эти уравнения обеспечивают заданные значения для регулятора ориентации.

Трехмерный контроллер траектории используется для отслеживания трехмерных траекторий. Так как в задаче рассматривается квадрокоптер, который движется не по агрессивной траектории, то можно сохранить те же допущения, которые использовались при управлении в режиме зависания в воздухе.

Чтобы получить этот контроллер, используем те же методы, что и в (11), за исключением того, что $\dot{r}_{i,T}$ и $r_{i,T}$ больше не равны нулю, а получены из уточнения траектории. Если предположение о приближающемся зависании верно и динамика линейная, контроллер, который генерирует желаемое ускорение $\ddot{r}_{i,des}$, согласно (11) гарантирует экспоненциальную погрешность, сходящуюся к нулю.

Тем не менее, возможно, что заданная траектория имеет изгибы и повороты, которым слишком трудно следовать идеально из-за ошибок в модели или ограничений входных сигналов. Поэтому предлагается модификация, которая позволит квадрокоптеру следовать по пути, даже если он не сможет следовать параметризованной по времени траектории.

Пусть r_T обозначает ближайшую точку на желаемой траектории к текущей позиции и пусть желаемая скорость и ускорение, получающиеся путем дифференцирования заданной траектории, определяются как $\dot{r}_T$ и $\ddot{r}_T$ соответственно. Пусть единичный касательный вектор траектории (единичный вектор вдоль $\dot{r}_T$) будет t. Единичный вектор, направленный по нормали к траектории, t, получается путем дифференцирования касательного вектора по

времени или длине дуги, и единичный бинормальный вектор является векторным произведением $b = t \times n$.

Мы определяем ошибки положения и скорости в соответствии со следующими уравнениями:

$$e_p = ((r_T - r)n)n + ((r_T - r)b)b$$

$$e_v = \dot{r}_T - \dot{r}$$

Следует обратить внимание, что здесь игнорируется ошибка положения в тангенциальном направлении и учитывается только ошибка положения в плоскости, которая является нормальной к кривой в ближайшей точке. Еще раз рассчитывается заданное ускорение $\ddot{r}_{i,des}$ по обратной связи ПД регулятора, как показано в (11). В векторной форме записи:

$$(\ddot{r}_T - \ddot{r}_{des}) + k_d e_v + k_p e_p = 0$$

Наконец, используем (14 - 16) для вычисления желаемых углов крена и тангажа.

Далее генерируется произвольная траектория из пяти опорных точек и проводится симуляция работы квадрокоптера при условии, что симуляция начинается в тот момент, когда квадрокоптер находится в первой точке.

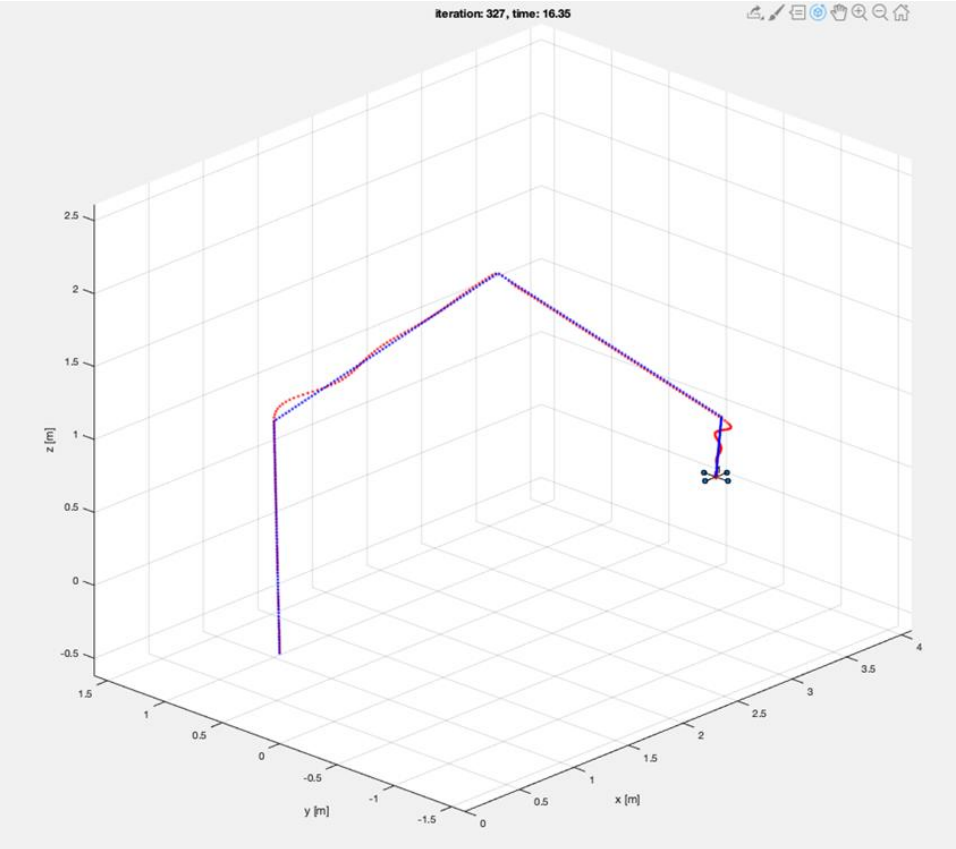


Рисунок 3. Трехмерный вид заданной (синей) и реальной (красной) траектории

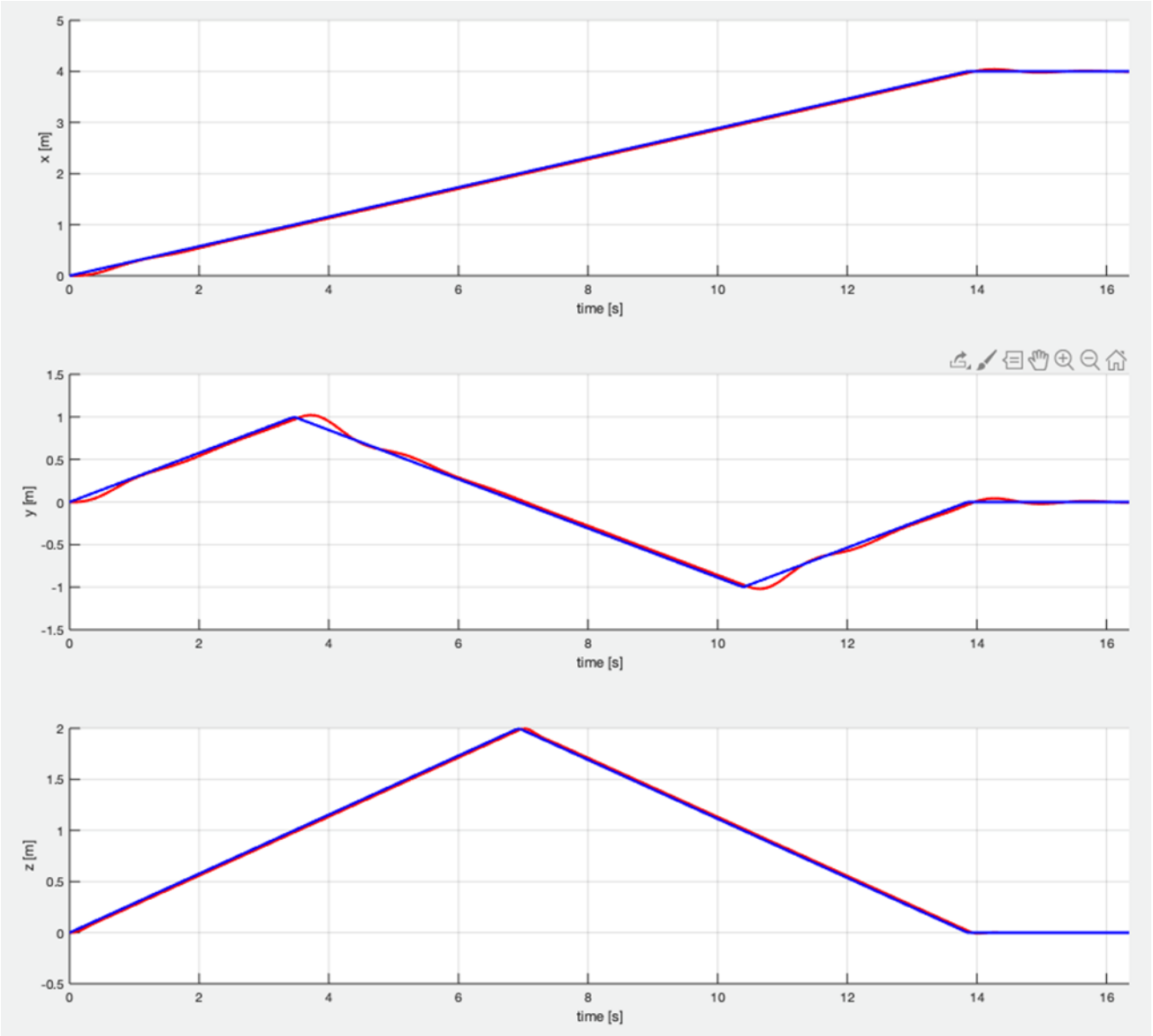


Рисунок 3. Графики заданной (синей) и реальной (красной) траектории по осям

Как видно из представленных данных, получено идеальное прохождение всех заданных опорных точек, но присутствуют достаточно большие ошибки при переходе с одних участков траектории на другие. Появление этих ошибок связано с тем, что использовался самый простой способ создания траектории – линейное соединение опорных точек. В будущем стоит задача построить генератор опорных траекторий по методу оптимизации сплайнами или по методу Minimum Snap Trajectory Generation, что позволит значительно повысить скорость прохождения маршрута и добиться более устойчивого и стабильного

полета. Наряду с этим будет решена задача построения агрессивных траекторий, для которых требуется избавиться от большинства допущений, но зато это позволит решать задачи на гораздо больших скоростях полета.

Литература

1. Shen, Shaojie, "Autonomous Navigation in Complex Indoor and Outdoor Environments with Micro Aerial Vehicles" (2014). Publicly Accessible Penn Dissertations. 1439.
2. Mellinger, Daniel Warren, "Trajectory Generation and Control for Quadrotors" (2012). Publicly Accessible Penn Dissertations. 547.
3. Огольцов И.И., Рожнин Н.Б., Шеваль В.В. Математическая модель квадрокоптера аэромобильного лидара // Известия ТулГУ. Технические науки. – 2012. – Вып. 1. – С. 47-55.
4. Сидорова А.А., Малышенко А.М. Анализ эффективности алгоритмов автоматической настройки адаптивных промышленных ПИД-регуляторов // Известия Томского политехнического университета. – 2011. – Т. 318, № 5. – С. 110-115.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учеб. пособие. – В 10-ти т. Т. I. Механика. – 4-е изд., испр. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 216 с
6. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. – 2-е изд., испр. и перераб. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1968. – 800 с

Literature

1. Shen, Shaojie, "Autonomous Navigation in Complex Indoor and Outdoor Environments with Micro Aerial Vehicles" (2014). Publicly Accessible Penn Dissertations. 1439.
2. Mellinger, Daniel Warren, "Trajectory Generation and Control for Quadrotors" (2012). Publicly Accessible Penn Dissertations. 547.
3. Ogoltsov I. I., Rozhnin N. B., Cheval V. V. Mathematical model of an airmobile lidar quadcopter // News Of Tulsu. Technical Sciences, 2012, Issue 1, pp. 47-55.

4. Sidorova A. A., Malyshenko a.m. Analysis of the effectiveness of algorithms for automatic configuration of adaptive industrial PID controllers // Izvestiya Tomsk Polytechnic University, 2011, Vol. 318, no. 5, pp. 110-115.
5. Landau L. D., Lifshits E. M. Theoretical physics: Study guide. -In 10 T. T. I. Mechanics. - 4th ed., ISPR. - M.: Nauka. GL. ed. Fiz. - Mat. lit., 1988. - 216 s
6. Duboshin G. N. Celestial mechanics. Main tasks and methods. - 2nd ed., ISPR. and pererab. - M.: Nauka. GL. ed. Fiz. - Mat. lit., 1968. - 800 s