АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ МНОГОСЛОЙНОЙ КОМПОЗИТНОЙ ПЛАСТИНЫ СО СКВОЗНЫМ РАССЛОЕНИЕМ

STABILITY ANALYSIS OF A MULTI-LAYER COMPOSITE PLATE WITH THROUGH-STRATIFICATION

УДК 621

Юрина Ксения Вячеславовна

студент Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана, Россия, г. Москва, ssasha.yurin@mail.ru

Yurina Ksenia Vyacheslavovna

student of the Bauman Moscow state technical University, Moscow, Russia, ssasha.yurin@mail.ru

АННОТАЦИЯ

В статье рассматривается поведение многослойной пластины со сквозным расслоением при кинематическом нагружении. Приводится сравнительный анализ жесткостных характеристик пластины в зависимости от вида плоской задачи теории упругости. В работе предложена методика определения критической нагрузки, основанная на вариационном принципе Лагранжа с использованием метода Ритца и теории фон Кармана, которая позволяет учесть большие прогибы пластин. Получена картина закритического деформирования пластины. Работоспособность построенной модели доказана сравнением полученных результатов с опубликованными материалами.

ANNOTATION

The article deals with the behavior of a multilayer plate with a through-thickness delamination under kinematic loading. A comparative analysis of the plate

stiffness characteristics depending on the type of plane problem of elasticity theory is given. The paper proposes a method for determining the critical load based on the Lagrange variational principle using the Ritz method and von Karman theory, which allows for large deflections of plates. A picture of the transcritical deformation of the plate is obtained. The efficiency of the constructed model is proved by comparing the results obtained with published materials.

Ключевые слова: сквозное расслоение, многослойная пластина, устойчивость пластин, цилиндрический изгиб, энергетический метод, вариационный принцип.

Keyword: through-thickness delamination, multi-layer plate, plate stability, cylindrical bending, energy method, variational principle.

Введение. В процессе производства и эксплуатации деталей машин и строительных конструкций, изготовленных из многослойных композиционных материалов, часто встречаются дефекты, при которых нарушается связь между слоями. Это приводит к снижению прочности и жёсткости конструкции, поэтому важно установить степень их дальнейшей работоспособности. Недостаток в структуре материала может возникнуть в результате несовершенства технологии производства, однако более частой причиной является случайное ударное воздействие, в результате которого нарушается целостность пакета слоёв композита.

Изначально предполагалось, что многослойный композит наиболее эффективен в восприятии растягивающей нагрузки в направлении укладки волокна. В этом случае дефект между слоями не играет значительной роли. Но высокая удельная прочность и вес материала, а также вариативность свойств в зависимости от ориентации укладки слоёв расширили область его применения. В результате часто можно встретить слоистые оболочки и балки, работающие на изгиб или сжатие, как например, панель фюзеляжа самолёта. В таком случае поверхностные расслоения, находясь под действием

сжимающего внешнего воздействия, начинают выпучиваться, терять устойчивость и расти [7].

На данный момент существует несколько различных подходов к анализу расслоений. В основе большинства аналитических и численных методов лежит классическая теория расчёта многослойных композиционных структур. В работе [4] представлено аналитическое решение для нахождения критической нагрузки потери устойчивости отслоения в многослойной фанерной балке при изгибе. Для решения задачи широко используется вариационный принцип. Так в статьях [2, 8] с его помощью исследуется рост расслоений до и после потери устойчивости в тонких многослойных пластинах с единственным расслоением. В научных трудах 0 предложена новая аналитическая модель для исследования устойчивости упругих систем с дефектами в материале, которая также базируется на энергетических методах. Помимо прямоугольных пластин также исследуются круглые многослойные пластины с центральным расслоением [5]. Следует также отметить диссертацию [13], в которой предложена методика аналитического решения задачи о сжатии многослойной пластины с расслоением, в условиях плоского деформированного состояния, подтвержденная экспериментальными исследованиями.

Постановка задачи и принятые допущения. Рассмотрим пластину длиной $2L$, состоящую из некоторого количества разнонаправленных слоёв волокнистого композиционного материала. Предполагается, что края пластины под действием внешней сжимающей нагрузки имеют фиксированное смещение. Следует отметить, что короткие стороны модели жёстко заделаны от всех перемещений кроме продольных (вдоль оси x).

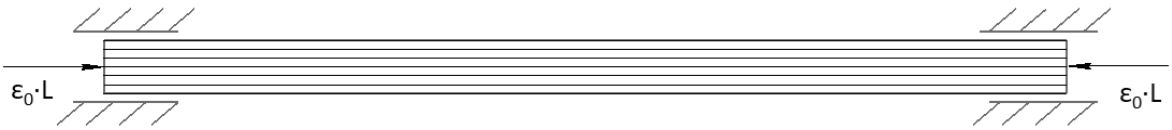

Рисунок 1 – Расчётная схема

Между слоями пластины имеется сквозной дефект длиной $2l$, который условно разделяет модель на три участка (Рисунок 2). Участки 1 и 4 описывают неповреждённые зоны модели. 3 и 2 участок соответствуют верхнему и нижнему отслоению. Каждой части пластины соответствует своя система координат с началом в центре пластины. Следует отметить, что ось x каждого участка совмещена с его средней линией. Так как модель имеет оси симметрии в дальнейшем будем рассматривать только её половину.

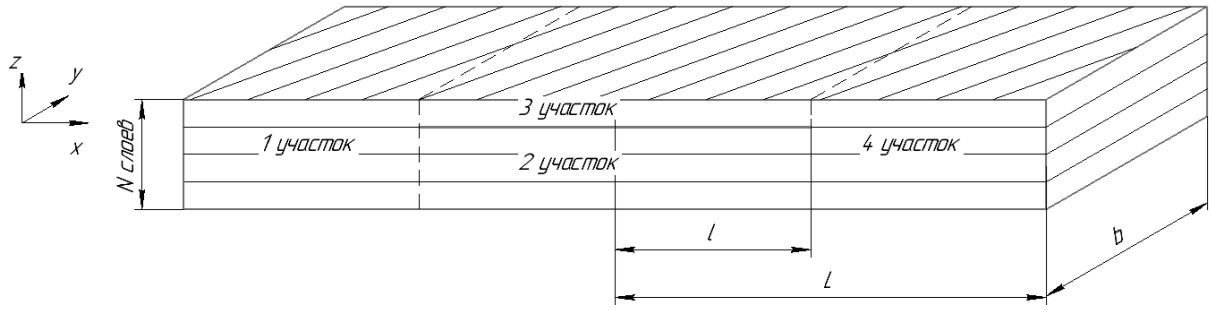

Рисунок 2 – Описание геометрии модели

Для того чтобы формализовать задачу были приняты некоторые допущения. Считается, что деформации и кривизны в направлении оси y пренебрежимо малы, а также верны гипотезы Кирхгофа-Лява. Следует принять во внимание, что все участки пластины рассматриваются как независимые многослойные пакеты, поля перемещений которых непрерывны и соответствуют граничным условиям. Отметим также, что контакт расслоившихся участков (2-го и 3-го) не рассматривается.

Вычисление жесткостных характеристик пластины. Первым этапом анализа данной конструкции является вычисление жесткостных характеристик модели. Классический подход подразумевает перерасчёт упругих характеристик слоя, известных в локальной системе координат, связанной с направлением укладки волокон, в единую глобальную систему координат всего пакета [11]. Исходная модель является одномерной. Рассмотрим три возможных способа вычисления упругих характеристик многослойной пластины в зависимости от принятых допущений.

Модель плоского деформированного состояния (I)

Данная модель опирается на допущение, что деформации и кривизны $\varepsilon_y,\ \varepsilon_{xy},\ \kappa_y,\ \kappa_{xy}$ равны нулю. Это могло иметь место, если бы пластина была достаточно широкой и жёсткой в направлении оси y и фактически не деформировалась бы в этом направлении.

В случае принятия описанной гипотезы жёсткости пластины получаются из классической теории изгиба многослойных композитов, согласно которой имеем матрицы мембранных $[A]$, мембранно-изгибных $[B]$, и изгибных $[D]$ жесткостей [3]. Путём обнуления соответствующих компонент деформаций и кривизны, приходим к выражению:

$$\begin{pmatrix} N_x \\ M_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & B_{11} \\ B_{11} & D_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \kappa_x \end{pmatrix},$$

Откуда

$$\alpha^I = \frac{D_{11}}{A_{11}D_{11} - {B_{11}}^2}; \beta^I = \frac{-B_{11}}{A_{11}D_{11} - {B_{11}}^2};\ d^I = \frac{A_{11}}{A_{11}D_{11} - {B_{11}}^2}.$$

Модель плоского напряжённого состояния (II)

С другой стороны, можно обнулить напряжения $\sigma_y,\ \sigma_{xy}$ для каждого слоя пакета. Следует отметить, что такая модель лишена физического смысла и подразумевает, что ширина пластины мала настолько, что она вырождается в брус [2].

Для вычисления жесткостных параметров первоначально рассмотрим закон Гука для отдельного слоя

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\varepsilon_x = \frac{Q_{22}Q_{33} - {Q_{23}}^2}{Q_{11}\left(Q_{22}Q_{33} - {Q_{23}}^2\right) + Q_{12}(Q_{23}Q_{13} - Q_{12}Q_{33}) + Q_{13}(Q_{12}Q_{23} - Q_{13}Q_{22})}\sigma_x$$

$$\sigma_x = \left[Q_{11} + Q_{12}\frac{(Q_{23}Q_{13} - Q_{12}Q_{33})}{\left(Q_{22}Q_{33} - {Q_{23}}^2\right)} + Q_{13}\frac{(Q_{12}Q_{23} - Q_{13}Q_{22})}{\left(Q_{22}Q_{33} - {Q_{23}}^2\right)}\right]\varepsilon_1 = \tilde{Q}\varepsilon_x.$$

Следует понимать, что матрица $[Q]$ для каждого слоя пластины зависит от угла укладки волокна φ в глобальной системе координат, и определяется с помощью матрицы трансформации.

$$[Q] = [T]\begin{pmatrix} \dfrac{E_1}{1-\mu_{12}\mu_{21}} & \dfrac{E_1\mu_{21}}{1-\mu_{12}\mu_{21}} & 0 \\ \dfrac{E_2\mu_{12}}{1-\mu_{12}\mu_{21}} & \dfrac{E_2}{1-\mu_{12}\mu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{pmatrix}[T]^T,$$

где матрица трансформации

$$[T] = \begin{pmatrix} \cos^2\varphi & \sin^2\varphi & -2\sin\varphi\cos\varphi \\ \sin^2\varphi & \cos^2\varphi & 2\sin\varphi\cos\varphi \\ \sin\varphi\cos\varphi & -\sin\varphi\cos\varphi & \cos^2\varphi - \sin^2\varphi \end{pmatrix}.$$

В этом случае жёсткости можно вычислить по формулам:

$$A_{11} = \sum_{k=1}^{n}\tilde{Q}^k\left(z^{(k)} - z^{(k-1)}\right); B_{11} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\tilde{Q}^k\left(\left(z^{(k)}\right)^2 - \left(z^{(k-1)}\right)^2\right);$$

$$D_{11} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\tilde{Q}^k\left(\left(z^{(k)}\right)^3 - \left(z^{(k-1)}\right)^3\right).$$

Далее аналогично первой модели получаем:

$$\alpha^{II} = \frac{D_{11}}{A_{11}D_{11} - {B_{11}}^2}; \beta^{II} = \frac{-B_{11}}{A_{11}D_{11} - {B_{11}}^2};\ d^{II} = \frac{A_{11}}{A_{11}D_{11} - {B_{11}}^2}.$$

Модель цидиндрическогоо изгиба (III)

Наиболее полно учесть особенности изгиба многослойной композитной пластины позволяет третья модель. Важно принять во внимание особенность несимметричной укладки пакета. Она заключается в том, что при наличии только лишь силовых факторов, действующих в плоскости xz, хотя поля перемещений и силовые факторы в рассматриваемой расчётной схеме зависят только от координаты *x*, может иметь место изгиб пластины в направлении оси *y* [2]. Это происходит из-за наличия ненулевых компонент в матрице

мембранно-изгибных жесткостей $[B]$. Для реализации третьей модели обнулим погонные силы и моменты, действующие в направлении *y*, и отыщем эффективные жёсткости $A_{eff},\ B_{eff}\ и\ D_{eff}$:

$$\begin{pmatrix} N_x \\ 0 \\ 0 \\ M_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & B_{12} & B_{22} & B_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & B_{13} & B_{23} & B_{33} \\ B_{11} & B_{12} & B_{13} & D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ B_{12} & B_{22} & B_{23} & D_{12} & D_{22} & D_{23} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} & D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\varepsilon_{xy} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{pmatrix};$$

$$[ABD] = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & B_{12} & B_{22} & B_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & B_{13} & B_{23} & B_{33} \\ B_{11} & B_{12} & B_{13} & D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ B_{12} & B_{22} & B_{23} & D_{12} & D_{22} & D_{23} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} & D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{pmatrix}.$$

Найдём обратную [*ABD*] матрицу:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\varepsilon_{xy} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{pmatrix} = [ABD]^{-1} \begin{pmatrix} N_x \\ 0 \\ 0 \\ M_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \kappa_x \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^{III} & \beta^{III} \\ \beta^{III} & d^{III} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} N_x \\ M_x \end{pmatrix}.$$

Получаем эффективные жёсткости следующим образом:

$$\alpha^{III} = [ABD]^{-1}[1,1];\ \beta^{III} = [ABD]^{-1}[1,4];\ d^{III} = [ABD]^{-1}[4,4].$$

$$\left[ABD_{eff}\right] = \begin{pmatrix} \alpha^{III} & \beta^{III} \\ \beta^{III} & d^{III} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_{eff} & B_{eff} \\ B_{eff} & D_{eff} \end{pmatrix}.$$

В итоге получаем следующее выражения для описания изгиба исходной пластины:

$$\begin{pmatrix} N_x \\ M_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{eff} & B_{eff} \\ B_{eff} & D_{eff} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \kappa_x \end{pmatrix}.$$

Проведём сравнительный анализ трёх подходов к вычислению жесткостных характеристик многослойного пакета. Для этого рассмотрим пластину с несимметричной укладкой слоёв $(\varphi, 0, -\varphi)$. И построим графики изменения параметров, определяющих мембранную и изгибную жёсткость, в

зависимости от угла $\varphi \in [0; 90°]$. При этом для большой наглядности проведём нормировку упругих характеристик следующим образом:

$$\bar{\alpha}^i(\varphi) = \frac{\alpha^i(\varphi)}{\alpha^i\left(\frac{\pi}{2}\right)}; \bar{d}^i(\varphi) = \frac{d^i(\varphi)}{d^i\left(\frac{\pi}{2}\right)}, \text{ где } i = I, II, III.$$

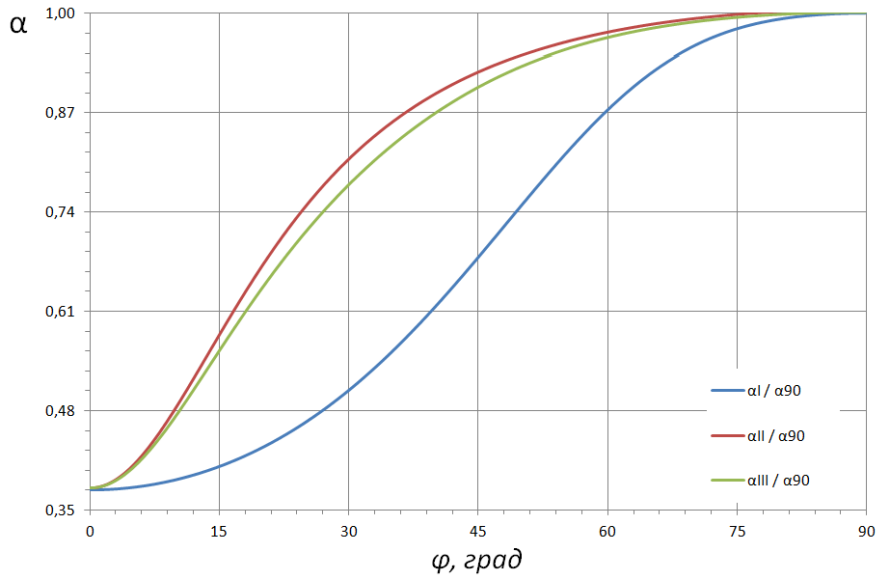

Рисунок 3 – Зависимость параметра α от угла укладки φ в пакете $(\varphi, 0, -\varphi)$

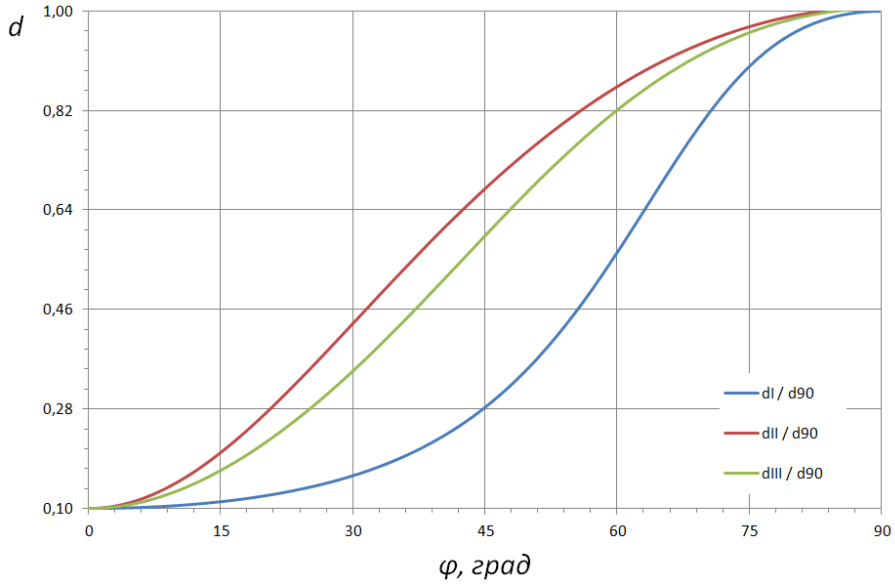

Рисунок 4 – Зависимость параметра d от угла укладки φ в пакете $(\varphi, 0, -\varphi)$

По графикам видно, что кривая для третьей модели, позволяющая учесть эффекты, возникающие при несимметричной укладке, находится между первой и второй моделями. При этом в случае симметричной укладки модели

дают идентичные результаты. В дальнейшем для решения поставленной задачи будем использовать третью модель.

Энергетический метод вычисления критической нагрузки. Для анализа потери устойчивости пластины необходимо составить выражение для потенциальной энергии деформации. Для аппроксимации прогибов и продольных перемещений точек каждого из участков пластины воспользуемся следующими выражениями, содержащими неизвестные коэффициенты $q = \{qu_{11}, \dots, qu_{1N}, qw_{11}, \dots, qw_{1N}, qu_{21}, \dots, qu_{2N}, qw_{21}, \dots, qw_{2N}, qu_{31}, \dots, qu_{3N}, qw_{21}, \dots, qw_{2N}, qu_{31}, \dots, qu_{3N}, qw_{31}, \dots, qw_{3N}\}$:

1 участок $(l < x < L)$

$$u_1 = \varepsilon_0 x + \left(\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 1\right)\left(\frac{x}{L}\right)\sum_{i=1}^{N} qu_{1i}\left(\frac{x}{L}\right)^{2(i-1)};\ w_1 = \left(\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 1\right)^2 \sum_{i=1}^{N} qw_{1i}\left(\frac{x}{L}\right)^{2(i-1)}.$$

2 участок $(0 < x < l)$

$$u_2 = u_1 + \left(\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 1\right)\left(\frac{x}{l}\right)\sum_{i=1}^{N} qu_{2i}\left(\frac{x}{l}\right)^{2(i-1)} + \frac{h_3}{2}\left(-\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)\Big|_{x=l};\ w_2 = w_1 + \left(\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 1\right)^2 \sum_{i=1}^{N} qw_{2i}\left(\frac{x}{l}\right)^{2(i-1)}.$$

3 участок $(0 < x < l)$

$$u_3 = u_1 + \left(\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 1\right)\left(\frac{x}{l}\right)\sum_{i=1}^{N} qu_{3i}\left(\frac{x}{l}\right)^{2(i-1)} - \frac{h_2}{2}\left(-\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)\Big|_{x=l};$$

$$\mathrm{w_3} = \mathrm{w_1} + \left(\left(\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{l}}\right)^2 - 1\right)^2 \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{qw_{3i}}\left(\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{l}}\right)^{2(\mathrm{i}-1)}.$$

Данные формулы содержат в себе перемещения, связанные с поворотом границы между цельной и повреждённой частями пластины. Они имеют место так как срединные поверхности участков не совпадают. При этом h_2 и h_3 – это суммарные толщины соответствующих участков.

Следует отметить, что предложенные соотношения удовлетворяют граничным условиям на концах участков при любых значениях неизвестных коэффициентов.

Для определения деформаций и кривизны участков воспользуемся соотношениями теории фон Кармана [10]:

$$\varepsilon_{x1} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2; \varepsilon_{x2} = \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)^2; \varepsilon_{x3} = \frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_3}{\partial x}\right)^2;$$

$$\kappa_{x1} = -\frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2};\ \kappa_{x2} = -\frac{\partial^2 w_2}{\partial x_2^2};\ \kappa_{x3} = -\frac{\partial^2 w_3}{\partial x_3^2}.$$

С учётом описанных соотношений потенциальная энергия деформации системы может быть найдена по следующей формуле:

$$W = 2\frac{1}{2}b\left[\int_l^L \left(D_{eff1}{\kappa_{x1}}^2 + A_{eff1}{\varepsilon_{x1}}^2 + 2B_{eff1}\varepsilon_{x1}\kappa_{x1}\right)dx_1 + \right.$$
$$+ \int_0^l \left(D_{eff2}{\kappa_{x2}}^2 + A_{eff2}{\varepsilon_{x2}}^2 + 2B_{eff2}\varepsilon_{x2}\kappa_{x2}\right)dx_2 +$$
$$\left. + \int_0^l \left(D_{eff3}{\kappa_{x3}}^2 + A_{eff3}{\varepsilon_{x3}}^2 + 2B_{eff3}\varepsilon_{x3}\kappa_{x3}\right)dx_3\right].$$

Полная потенциальная энергия системы может быть найдена как:

$$\Pi(q_i, \varepsilon_0, l) = W(q_i, \varepsilon_0, l), \text{ где } i = \overline{1,3N}.$$

При этом длина отслоения l считается постоянной, а коэффициенты q_i в зависимости от приложенных перемещений определяются согласно вариационному принципу.

$$\delta\Pi(q_i, \varepsilon_0) = 0;$$
$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0, \quad \text{где } i = \overline{1,3N}.$$

Получаем систему из $3N$ нелинейных алгебраических уравнений, решение которой представляет собой зависимость $q_i(\varepsilon_0)$.

В математическом пакете Wolfram Matematica реализована программа, позволяющая получить выражение для полной потенциальной энергии и

разрешающую систему уравнений в аналитическом. Решение проводится численно с помощью модифицированного метода Ньютона.

Результатом решения является зависимость между приложенной деформацией и перемещениями, по которой можно отследить деформирование системы до и после потери устойчивости вплоть до начала роста отслоения.

Отметим, что, зная деформации на концах пластины всегда можно пересчитать продольную нагрузку как $P = bN_x$, где b – ширина пластины, а N_x – погонное нормальное усилие на краю.

Результаты аналитического расчета и их тестирование. Для проверки разработанной методики была использована модель, описанная в работе [2]. Характеристики материала пластины представлены в таблице 1. При решении задачи использовалось 18 обобщённых координат, то есть прогибы и продольные перемещения каждого участка аппроксимировались полиномами 4-ой степени.

Таблица 1 – Характеристики образца

Характеристики материала			
$E_{11} = 137.9 \cdot 10^3 МПа$	$E_{22} = 8.98 \cdot 10^3 МПа$	$G_{12} = 7.2 \cdot 10^3 МПа$	$\mu_{12} = 0.3$
Характеристики геометрии			
Длина образца	$L = 96.52$ *мм*	Укладка образца	$[0°, (90°/0°)_7]$
Длина отслоения	$l = 50$ *мм*	Укладка отслоения	$[90°/0°/90°/0°]$
Ширина образца	$b = 12.7$ *мм*	Толщина слоя	$t = 0.0889$ *мм*

Для построения графиков и сравнения значений была проведена нормализация данных. Нормализованная нагрузка $P_{norm} = P/P_{Euler}$, где в знаменателе стоит нагрузка, при которой происходит потеря устойчивости по Эйлеру в пластине без дефекта, состоящей из 11 однонаправленных слоёв ($[0°]_{11}$). С учётом того, что изгибная жёсткость пластины характеризуется в этом случае первой компонентой матрицы *D*, получим:

$$P_{Euler} = \frac{c\pi^2 D_{11} b}{L^2},$$

где с-коэффициент закрепления (в случае заделанных концов пластины равен 4).

Нормализация максимального прогиба в центральной точке отслоения проводилась путём деления на суммарную толщину пакета.

В результате проведения расчётов получаем картину поведения многослойной пластины с дефектом при сжатии (Рисунок 5). По графику видно, что третий участок пластины (красная линия) теряет устойчивость в противоположную от, а второго участка (синяя линия) сторону. То есть при таком сочетании параметров расслоение раскрывается с ростом сжимающей нагрузки.

Анализируя полученную картину деформации, можно сделать вывод о хорошей сходимости результатов и работоспособности предложенной модели.

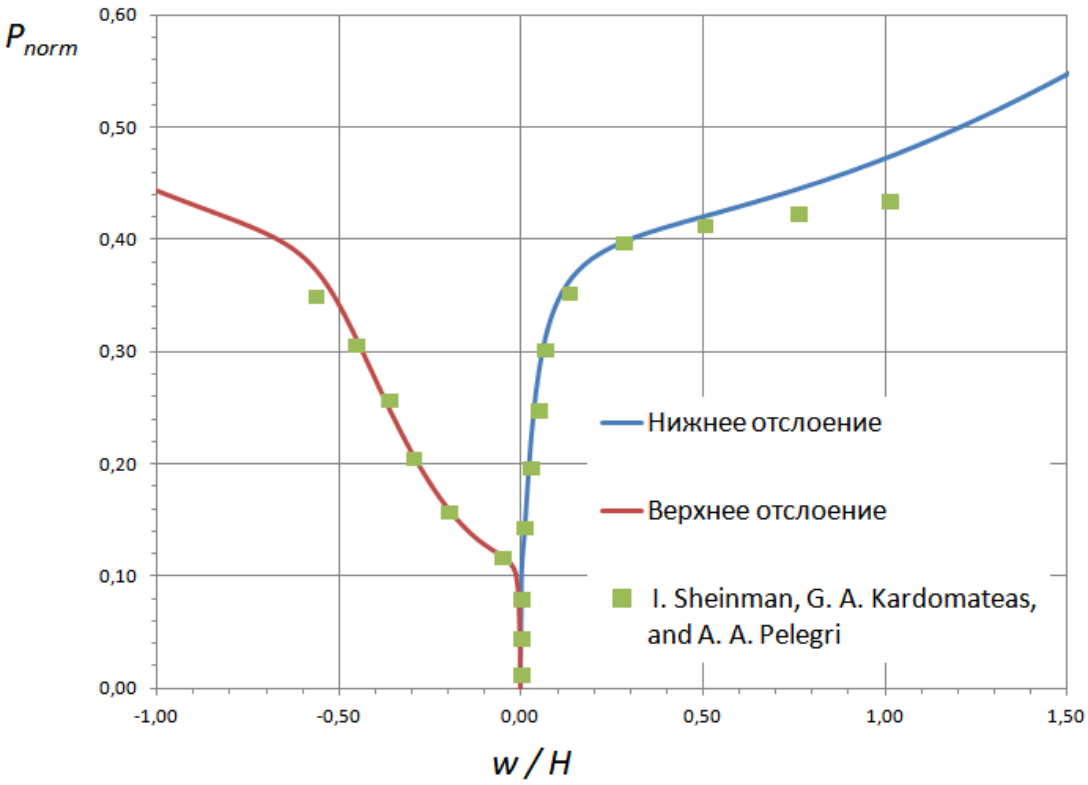

Рисунок 5 – Закритическое поведение многослойной композитной пластины с расслоением при сжатии

Заключение. Выполнен анализ поведения расслоения в многослойной пластине при сжатии. Разработана и реализована математическая модель, описывающая деформированное состояние пластины с дефектом.

Преимущество данного подхода заключается в том, что он применим при любой укладке слоёв, так как учитывает мембранно-сдвиговые компоненты матрицы жёсткости многослойного пакета. Произведена тарировка модели, а именно сравнение с данными, опубликованными в работе [2]. В результате проделанного исследования можно сделать вывод о том, что подход, описанный в данной работе, даёт верные результаты.

Список литературы:

[1] A. Köllner, R. Jungnickel, and C. Völlmecke. Delamination growth in buckled composite struts. Int J Fract, 202(2):261–269, 2016

[2] I. Sheinman, G. A. Kardomateas, and A. A. Pelegri. Delamination growth during pre- and post-buckling phases of delaminated composite laminates. Int J Solids Struct, 35(1-2):19–31, 1998.

[3] Jones R. Mechanics of Composite Materials. Taylor & Francis. pp. 109-112. 1999.

[4] Kim Y., Davalos J. F., Barbero E. J. Delamination buckling of FRP layer in laminated wood beams //Composite structures. – 1997. – Т. 37. – №. 3-4. – С. 311-320.

[5] Köllner A., Forsbach F., Völlmecke C. Delamination buckling in composite plates: an analytical approach to predict delamination growth //New Achievements in Continuum Mechanics and Thermodynamics. – Springer, Cham, 2019. – С. 241-255.

[6] Köllner, A.: An analytical framework for the structural stability analysis of damageable structures and its application to delaminated composites. Dissertation, Technische Universität Berlin (2017)

[7] Niu M. C. Y. Composite airframe structures: practical design information and data. – Adaso Adastra Engineering Center, 1992.

[8] Sheinman I., Kardomateas G. A. Energy release rate and stress intensity factors for delaminated composite laminates //International Journal of Solids and Structures. – 1997. – Т. 34. – №. 4. – С. 451-459.

[9] Tsai S.W., Pagano N. J. Invariant properties of composite materials. In: Composite materials workshop/Ed. By S. W. Tsai, J, C. Halpin, N. J. Pagano. Technomic Publishing Co., Inc., 1968, pp. 233-253.

[10] Алфутов Н. А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. – Машиностроение, 1991.

[11] Алфутов, Н. А. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов [Текст] / Н. А. Алфутов, П. А. Зиновьев, Б. Г. Попов. - М. : "Машиностроение", 1984. - 263 с.

[12] Лехницкий, С.Г. Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий. - М. : Наука, 1977. - 416 с.

[13] Чермошенцева А.С. Разработка методики повышения прочности тонкостенных элементов конструкций из композиционных материалов с дефектами типа расслоения: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.04 – МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 2018 - 169 с.

References:

[1] A. Köllner, R. Jungnickel, and C. Völlmecke. Delamination growth in buckled composite struts. Int J Fract, 202(2):261–269, 2016

[2] I. Sheinman, G. A. Kardomateas, and A. A. Pelegri. Delamination growth during pre- and post-buckling phases of delaminated composite laminates. Int J Solids Struct, 35(1-2):19–31, 1998.

[3] Jones R. Mechanics of Composite Materials. Taylor & Francis. pp. 109-112. 1999.

[4] Kim Y., Davalos J. F., Barbero E. J. Delamination buckling of FRP layer in laminated wood beams / / Composite structures. - 1997. - Vol. 37. - No. 3-4. - Pp. 311-320.

[5] Köllner A., Forsbach F., Völlmecke C. Delamination buckling in composite plates: an analytical approach to predict delamination growth / / New Achievements in Continuum Mechanics and Thermodynamics. - Springer, Cham, 2019. - Pp. 241-255.

[6] Köllner, A.: An analytical framework for the structural stability analysis of damageable structures and its application to delaminated composites. Dissertation, Technische Universität Berlin (2017)

[7] Niu M. C. Y. Composite airframe structures: practical design information and data. – Adaso Adastra Engineering Center, 1992.

[8] Sheinman I., Kardomateas G. A. Energy release rate and stress intensity factors for delaminated composite laminates / / International Journal of Solids and Structures. – 1997. – Vol. 34. – No. 4. – Pp. 451-459.

[9] Tsai S.W., Pagano N. J. Invariant properties of composite materials. ¬ In: Composite materials workshop/Ed. By S. W. Tsai, J, C. Halpin, N. J. Pagano. Technomic Publishing Co., Inc., 1968, pp. 233-253.

[10] Alfutov N. A. Fundamentals of calculation for the stability of elastic systems. - Mechanical engineering, 1991.

[11] Alfutov, N. A. Calculation of multilayer plates and shells from composite materials [Text] / N. A. Alfutov, P. A. Zinoviev, B. G. Popov. - M.: "Mashinostroenie", 1984. - 263 p.

[12] Lehnitsky, S. G. Theory of elasticity of an anisotropic body / S. G. Lehnitsky. - Moscow: Nauka, 1977. - 416 p.

[13] Chermoshentseva A. S. Development of methods for increasing the strength of thin-walled elements of structures made of composite materials with defects of the type of delamination: dis. ... Cand. tech. science: 01.02.04-Bauman Moscow state technical University, Moscow, 2018-169 p.