АНАЛИЗ ПЕРЕМЕННОЙ ВЯЗКОСТИ В МОДЕЛИ КЕССОНА И ХЕРШЕЛА-БАКЛИ

VARIABLE VISCOSITY ANALYSIS IN THE CAISSON AND HERSHEL-BUCKLEY MODEL

УДК 532.5.031

Королева Ю.О., Российский государственный университет нефти и газа им. И. М. Губкина (Национальный исследовательский университет) кафедра высшей математики

Королев А.В., Российский государственный университет нефти и газа им. И. М. Губкина (Национальный исследовательский университет) кафедра высшей математики

Koroleva Y.O., koroleva.y@gubkin.ru

Korolev A.V., a.v.korolev@mail.ru

Аннотация

В работе рассмотрены системы Кессона и Хершела-Бакли, моделирующие течение неньютоновской жидкости в тонком слое. Анализируется поведение потока неньютоновской жидкости (крови) в капиллярах, около их стенок. Изучается зависимость переменной вязкости от скорости, напряжения, а также от некоторых геометрических особенностей. Выявлено, что увеличение вязкости ведет к уменьшению скорости. Получены аналитические оценки на различные характеристики потока.

Annotation

The paper considers the Caisson and Hershel-Buckley systems that model the flow of a non-Newtonian fluid in a thin layer. The behavior of the flow of non-Newtonian fluid (blood) in capillaries, near their walls, is analyzed. The dependence

of variable viscosity on speed, stress, and some geometric features is studied. It was found that an increase in viscosity leads to a decrease in speed. Analytical estimates for various flow characteristics are obtained.

Ключевые слова: Переменная вязкость, неньютоновская жидкость, система Кессона, модель Хершела-Бакли.

Keywords: Variable viscosity, non-Newtonian fluid, Caisson system, Hershel-Buckley model.

Одним из важных вопросов в механике жидкости является изучение поведения течения той или иной жидкости в зависимости от различных характеристик потока. Бесспорными является зависимость между скоростью, давлением, напряжением, вязкостью жидкости. Кроме того, в различным задачах гидродинамики немалую роль играет геометрия области, заполняемой жидкостью. Влияние вязкости на скорость течения хорошо ощутимо в природе.

Уравнения Навье-Стокса являются классической математической моделью для описания характеристик потока неньютоновской жидкости.

В данной работе мы обсуждаем модели Кессона и Хершела-Бакли [1], моделирующее течения с несколько иными реологическими свойствами. В частности, данные модели используются при описании течения крови по тонким капиллярам [2]. В такой задаче одним из составляющих является как раз вязкость, которая может меняться от точки к точке, а также во времени в нестационарном случае.

Перейдем к математическому описанию задачи.

Рассмотрим двухфазную модель течения крови переменной вязкости в тонких капиллярах цилиндрической формы $\Omega = \{(z,r),\ 0 \le z \le L,\ 0 \le r \le R(z)\}$, где $R(z)$ - граница шероховатой поверхности капилляров, Рис. 1.

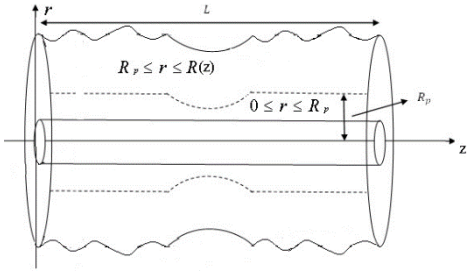


Рис. 1: геометрия области

Для упрощения будем рассматривать стационарное симметричное продольное течение вдоль стенок, считая, что лишь одна компонента скорости отлична от нуля: $u_r \equiv u_\varphi \equiv 0,\ u_z = u_z(r)$. Ненулевую компоненту скорости обозначим для удобства $u(r)$. Данная двухфазная модель математически описывается системой уравнений Хершела-Бакли или Кессона:

$$\tau = \tau_y + \{\mu(r)\}^{\frac{1}{n}}\left(-\frac{\partial u}{\partial r}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad если \quad \tau \ge \tau_y \qquad R_p(\tau_y) \le r \le R(z) \quad \text{(Хершел-Бакли)} \quad (1а)$$

$$\tau^{\frac{1}{2}} = \tau_y^{\frac{1}{2}} + \mu^{\frac{1}{2}}(r)\left(-\frac{\partial u}{\partial r}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad если \quad \tau \ge \tau_y \qquad R_p(\tau_y) \le r \le R(z) \quad \text{(Кессон)} \quad (1б)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 0, \ если \quad \tau < \tau_y, \qquad 0 \le r \le R_p(\tau_y) \quad (2)$$

и общим уравнением состояния жидкости, из которого для стационарного случая получаем уравнения:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau) = 0$$

Здесь u - скорость потока, p – давление, τ - напряжение, τ_y - критическое напряжение, задающее предел текучести, при переходе через который поток становится неньютоновским, $\mu(r)$ - неньютоновская вязкость, $n \ge 1$ – некий параметр потока. При $n = 1$ и $\tau_y = 0$ течение является ньютоновским. Граница раздела двух фаз $R_p(\tau_y)$ зависит от предельного значения напряжения τ_y: $\tau(R_p(\tau_y), z) = \tau_y$. Граничные условия выбраны следующим образом: τ конечно при $r = 0$; $u(R(z)) = 0$, давление известно на боковых стенках капилляра.

В области $\Omega^{Newt} = \{(z,r),\ 0 \le z \le L,\ 0 \le \mathrm{r} \le R_p(\tau_y)\}$, недалеко от центра, где концентрация эритроцитов велика, течение является ньютоновским, при этом скорость не зависит от радиуса.

Используя неравенство Фридрихса [5] и уравнения (1а), (1б), можно получить оценку для скорости потока в зависимости от вязкости и разности напряжений [4]:

$$\|u\|_{L_2(R_p,R(z))} \le C \left\| \frac{\left(\tau - \tau_y\right)^n}{\mu} \right\|_{L_2(R_p,R(z))}.$$

Здесь постоянная C зависит от геометрии области, по которой течет жидкость: $C = \max\{2R_p(R(z)-R_p),(R(z)-R_p)^2\}$.

Кроме этого, можно получить и непосредственную оценку для вязкости через скорость. Приведем выкладки для модели Хершела-.Бакли.

Интегрируя уравнение (1а) по области $[R_p, R(z)]$ и используя неравенства Коши-Буняковского, неравенство Фридрихса для скорости течения (см. [4]), получаем

$$\int_{R_p}^{R(z)} \left(\tau - \tau_y\right)^n dr = \int_{R_p}^{R(z)} -\frac{\partial u}{\partial r}\mu dr = \int_{R_p}^{R(z)} \frac{\partial \mu}{\partial r} u dr + u(R_p)\mu(R_p) \le \int_{R_p}^{R(z)} \left(\frac{\partial \mu}{\partial r}\right)^2 dr + \int_{R_p}^{R(z)} u^2 dr + u(R_p)\mu(R_p) \le$$

$$\le \int_{R_p}^{R(z)} \left(\frac{\partial \mu}{\partial r}\right)^2 dr + C\int_{R_p}^{R(z)} \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 dr + u(R_p)\mu(R_p).$$

Данное неравенство мы будем использовать для оценки вязкости. Кроме того, можно заметить из выведенной формулы, что норма разности напряжений τ, τ_y ограничена градиентом вязкости и скорости, а также произведение скорости на вязкость в точке раздела двух фаз.

Далее, вспоминая, что $\int_{R_p}^{R(z)} \left(\tau - \tau_y\right)^n dr = \int_{R_p}^{R(z)} -\frac{\partial u}{\partial r}\mu dr$, получаем оценку характеристик потока в неньютоновской области без явной зависимости от напряжения:

$$\left| \int_{R_p}^{R(z)} -\frac{\partial u}{\partial r}\mu dr \right| \le 2\int_{R_p}^{R(z)} \left(\frac{\partial \mu}{\partial r}\right)^2 dr + 2\int_{R_p}^{R(z)} u^2 dr + u(R_p)\mu(R_p). \quad (3)$$

Однако, в данной формуле неявно присутствует критическое напряжение τ_y, поскольку граница раздела фаз подчиняется уравнению $R_p = \frac{2\tau_y}{-p_s}$.

Анализируя (3), можно сказать, что при малом градиенте вязкости само значение вязкости также может быть мало. Рост вязкости уменьшает скорость потока.

Скорость течения, удовлетворяющая (1), (2) в неньютоновской области (вдали от центра), может быть вычислена по формуле

$$u(r,z) = \int_{r}^{R(z)} \frac{1}{\mu(r)}\left(-r\frac{p_s}{2} - \tau_y\right)^n dr,$$

где p_s - известный градиент давления.

Для случая, когда скорость течения возможно измерить, справедлива следующая приближенная формула для вязкости для обоих моделей:

$$\mu \approx Cu^{-1}(\sqrt{rp} - \sqrt{\tau_y})^2,\ \mu \approx Cu^{-1}(rp - \tau_y)^n.$$

Численные расчёты показывают, что скорость потока существенно уменьшается с ростом вязкости (рис. 2 а,б). Периодичность картины связана с особенностями рассматриваемой задачи. Предполагалось, что граница имеет некую периодическую структуру (шероховатость), которая дает эффект осцилляции скорости в пристеночных зонах капилляров [3].

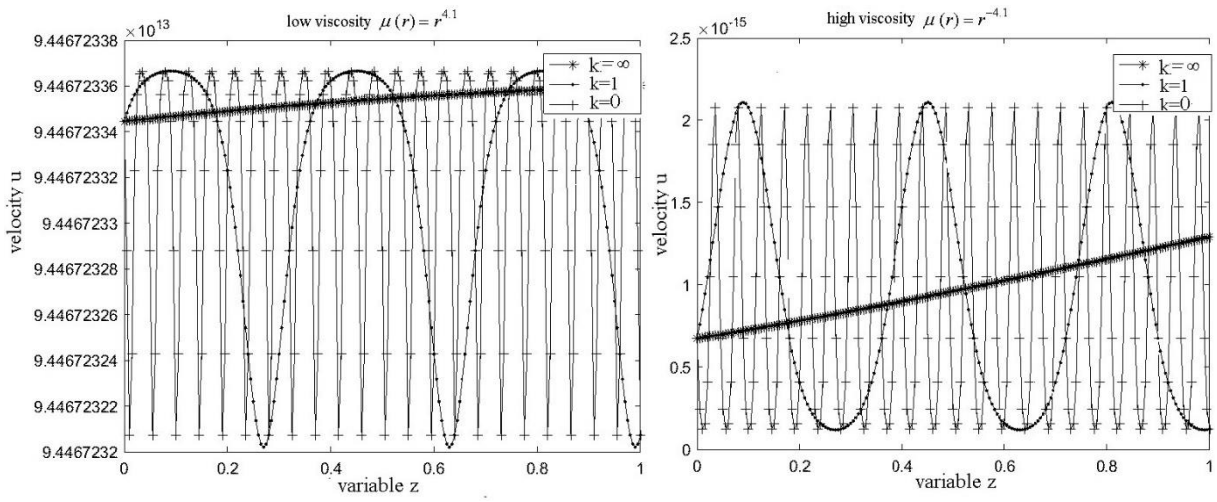


Рис. 2: поведение скорости для потока с низкой и высокой вязкостью.

Список литературы:

1. Herschel, W. H., Bulkley, R., Konsistenzmessungen von Gummi-Benzollösungen,. Коллоид Цайтшриф, 39, 1926, 291-300.
2. Медведев А. Е. уравнение кровотока в капиллярах / / Известия Алтайского государственного университета. Mathematica i Mechanica, 73 (1), 2012, 92-94.
3. Королева Ю.О., Королев А. В., Влияние шероховатости сосудов в математической модели кровотока Кассона, " IAENG International Journal of Applied Mathematics, vol. 50, no.2, PP. 405-408, 2020.
4. Королева Ю. О. О некоторых свойствах раствора для моделей кровотока Гершеля-Балкли и Кассона, Вестник современных исследований, 2018, 23-8(1), с. 344-349.
5. Г. А. Чечкин, Ю.О. Королева и Л.-Э. Перссон, " о точной асимптотике константы в неравенстве Фридриха для функций, исчезающих на части границы с Микрогомогенной структурой."Журнал неравенств и приложений, 2007. V. 2007, Article ID 34138, 13 страниц.

Bibliography:

1. Herschel, W.H., Bulkley, R., Konsistenzmessungen von Gummi-Benzollösungen,. *Kolloid Zeitschrif*, 39, 1926, 291–300.

2. Medvedev, A.E., Equation of blood flow in capillaries, *Izvestia Altaiskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Mathematica i Mechanica,* 73 (1), 2012, 92–94.
3. Koroleva Yu.O., Korolev A.V., Effect of Vessel Roughness in Casson's Mathematical Model of Blood Flow," IAENG International Journal of Applied Mathematics, vol. 50, no. 2, pp. 405-408, 2020.
4. Koroleva Y. O. On some properties of solution to Herschel-Bulkley and Casson's models of blood flow, Вестник современных исследований, 2018, 23-8(1), С. 344-349.
5. G.A. Chechkin, Yu.O. Koroleva and L.-E. Persson, "On the Precise Asymptotics of the Constant in the Friedrich`s Inequality for Functions, vanishing on the Part of the Boundary with Microinhomogeneous Structure." Journal of Inequalities and Applications, 2007. V. 2007, Article ID 34138, 13 pages.