ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

GEOMETRIC MODELS OF HYPERCOMPLEX NUMBERS

УДК 511

Ершов Виталий Владимирович, Старший преподаватель кафедры ВМ
ИКТИБ ЮФУ, Таганрог, РФ

Ershov Vitaly Vladimirovich, E-mail: vvershov@sfedu.ru

Аннотация

Гиперкомплексные числа изучаются довольно интенсивно как в алгебре, так и в геометрии, поскольку связи между этими дисциплинами обширны и плодотворны. С учением о гиперкомплексных числах связано большое количество важных и до сих пор нерешённых в науке задач. В частности, интересно рассмотрение связи отдельных видов гиперкомплексных чисел с евклидовым и неевклидовыми пространствами, позволяющее лучше представлять их практическое применение в прикладных науках.

Annotation

Hypercomplex numbers are studied quite intensively in both algebra and geometry, since the connections between these disciplines are extensive and fruitful. The doctrine of Hypercomplex numbers is associated with a large number of important and still unsolved problems in science. In particular, it is interesting to consider the relationship of certain types of Hypercomplex numbers with Euclidean and non-Euclidean spaces, which allows us to better represent their practical application in applied Sciences.

Ключевые слова: число, комплексный, точка, плоскость, алгебра.

Keywords: number, complex, point, plane, algebra.

Введение

Понятие гиперкомплексных чисел является обобщением, включающим, в частности, комплексные, паракомплексные (двойные) и дуальные числа. Данное обобщение необходимо для того, чтобы стандартные арифметические действия над этими числами в то же время выражали ряд геометрических процессов, происходящих в многомерном пространстве, либо позволяли получить количественное описание части физических законов. Попытки построить числа, выполняющие для трёхмерного пространства ту же роль, что и комплексные числа для плоскости, показали, что в рассматриваемой ситуации полную аналогию установить не удаётся. Это и привело к становлению и развитию системы гиперкомплексных чисел [1].

Построение геометрических моделей для комплексных чисел

Комплексное число представляет собой выражение вида a + bi, в котором a, b являются действительными числами, а i выступает в роли мнимой единицы, то есть символа, для которого квадрат равен –1: $i^2 = –1$ [2]. Число a является действительной, а число b — мнимой составляющей полного комплексного числа z = a + bi. В случае, когда b = 0, вместо выражения a + 0i используется просто a. Таким образом видно, что действительные (вещественные) числа представляют собой один из частных случаев комплексных чисел.

Система комплексных чисел, множество которых обозначается при помощи символа $\mathbb{C}$, является логически непротиворечивой при условии непротиворечивости системы вещественных чисел. Над комплексными числами можно проводить элементарные алгебраические операции, при этом они, равно как и вещественные, образуют коммутативное поле. Важно учитывать, что в поле вещественных чисел $\mathbb{R}$ извлечение арифметического квадратного корня допустимо только из неотрицательного числа, в то время как в поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ понятие арифметического квадратного корня отсутствует, и квадратный корень может быть извлечён из любого числа z = a + bi. Отсюда следует, что в поле $\mathbb{C}$ всё множество квадратных уравнений $x^2 + px + q = 0$ (с вещественными либо любыми комплексными коэффициентами p и q) имеет два (различных либо одинаковых) корня x_1 и x_2. Для обыкновенных комплексных чисел вида a + bi, где $i^2 = –1$, p = —1 и q = 0.

Фундаментальная роль комплексных чисел для алгебры базируется на том факте, что в процессе перехода от квадратных уравнений к кубическим и выше нет необходимости проводить дальнейшее расширение множества чисел, дополняя числа вида a + bi ещё какими-либо числами ‹особого рода»: оказывается, что любое уравнение n-й степени с вещественными либо комплексными коэффициентами непременно обладает комплексным корнем. Данный факт образует основную теорему алгебры [3].

Обыкновенные комплексные числа как точки плоскости

Развитие теории комплексных чисел в значительной степени связано с геометрическим истолкованием обыкновенных комплексных чисел как точек плоскости. Оно заключается в том, что точке плоскости, имеющий декартовы прямоугольные координаты x, y либо полярные координаты r, φ, сопоставляется комплексное число $z = x + iy = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

При этом вещественным числам $z = x + 0 y (= r (\cos 0 + i \sin 0))$ отвечают точки оси x (вещественная ось o); числам модуля r = 1 отвечают точки окружности S, центр которой лежит в начале координат O, а радиус составляет 1 (единичная окружность). Противоположным комплексным числам $z = x + iy$ и $– z = – x – iy$ отвечают точки, симметричные относительно точки O; сопряжённым комплексным числам $z = x + iy (= r (\cos \varphi + i \sin \varphi))$ и $\overline{z} = x – iy (= r (\cos (– \varphi) + i \sin (– \varphi)))$ отвечают точки, симметричные относительно прямой o. Равенства $z' = – z$ и $z' = \overline{z}$ можно понимать как записи определенных точечных преобразований, сопоставляющих каждой точке z новую точку z'. Данные равенства представляют собой симметрию как относительно точки O, так и относительно прямой o [3].

Исходя из определенных комплексных чисел (точек) $q = a + ib$ и $p = t (\cos a + i \sin a)$, где t – действительное число, можно получить равенства $z' = z + q$ и $((x' + iy')=(x + iy) + (a + ib))$. Из них следует, что вектор $\overrightarrow{zz'}$ совпадает с вектором $\overrightarrow{Oq}$ (геометрический смысл сложения комплексных чисел). Данные равенства определяют параллельный перенос плоскости на вектор $\overrightarrow{Oq}$.

Построение геометрических моделей для дуальных чисел

Систем комплексных чисел существует бесконечно много; для того, чтобы выбрать одну из этих систем, достаточно произвольным образом задать два вещественных числа p и q. К наиболее важным из этих систем, помимо обыкновенных комплексных чисел, относятся дуальные и двойные числа.

Дуальные числа, иначе именуемыми гиперкомплексными числами параболического типа, имеют вид $a + \varepsilon b$, где a и b являются вещественными числами, а ε представляет собой абстрактный элемент, не равный нулю, при этом $\varepsilon^2 = 0$, следовательно, $p = 0$ и $q = 0$ [4].

Множество дуальных чисел формирует двумерную коммутативную ассоциативную алгебру, имеющую единицу по отношению к мультипликативной операции, совершаемой над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$. От поля обыкновенных комплексных чисел эта алгебра отличается содержанием делителей нуля, имеющих вид $a + \varepsilon$. Плоскость дуальных чисел формирует «альтернативную комплексную плоскость». Алгебры прочих гиперкомплексных чисел (комплексных и двойных) выстраиваются аналогичным образом.

Дуальные числа как ориентированные прямые плоскости

В основном дробно-линейные преобразования, проводимые над алгеброй дуальных чисел, находят применение в геометрии. В то время, как комплексному числу в соответствие ставится точка на плоскости, дуальным числам принято сопоставлять ориентированные прямые. Можно заключить, что дробно-линейные преобразования, проводимые над алгеброй комплексных чисел, имеют вид точечных, а над алгеброй дуальных чисел действуют на множестве прямых, которые принадлежат одной плоскости. Такая геометрия имеет название линейчатой.

Эта теория даёт возможность применять дуальные числа для доказательства множества геометрических теорем, которые относятся к точкам, прямым и окружностям [5]. Согласно ей, ориентированной прямой l, имеющей полярные координаты θ и s, сопоставляется дуальное число $z = \mathrm{tg}\frac{\theta}{2}(1 + \varepsilon s) = u + \varepsilon v$, где $u = \mathrm{tg}\frac{\theta}{2}$, $v = \mathrm{tg}\frac{\theta}{2}s$.

Построение геометрических моделей для двойных чисел

Двойные числа, иначе именуемые паракомплексными числами, комплексными числами гиперболического типа, расщепляемыми комплексными числами либо контркомплексными числами, представляют собой гиперкомплексные числа вида $a + be$, где a и b являются вещественными числами, а e – абстрактным элементом, причём $e^2 = 1$ и $e \neq \pm 1$. В этом случае $p = 1$ и $q = 0$ [4].

Двойные числа рассматриваются, как частный случай плюарных чисел с рангом два. Над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ они формируют двумерную ассоциативно-коммутативную алгебру, включающую делители нуля, представляющие собой такие ненулевые элементы w и z, что $wz = 0$, вследствие чего, отлично от алгебры обыкновенных и общих комплексных чисел, не формируют поля. При этом все делители нуля имеют вид $a(1 \pm e)$. Алгебра двойных чисел раскладывается в прямую сумму пары полей $\mathbb{R}$.

Двойные числа как ориентированные прямые плоскости Лобачевского

В основном двойные числа нашли применение в неевклидовой геометрии Лобачевского. Абсолютно аналогично дуальным числам, произвольным ориентированным прямым, относящимся к плоскости Лобачевского, всегда можно сопоставить некоторые двойные числа. В полярной системе координат всем пересекающим полярную ось o прямым l, обладающим полярными координатами θ, s, соответствует двойное число $z = \mathrm{tg}\frac{\theta}{2}(\mathrm{chs} + e\mathrm{shs})$, а расходящимся с o прямым m, направленным в одну с o сторону от общего для них перпендикуляра PQ, — число $z = \mathrm{tg}\frac{d}{2}(\mathrm{shs}' + e\mathrm{chs}')$, где d={m, o}={P, Q}, являющееся кратчайшим ориентированным интервалом между прямыми m и o [3].

Для распространения обозначенного соответствия на все числа применяется понятие «бесконечно удалённых прямых» плоскости Лобачевского, представляемых в качестве касательных к абсолюту $\sum$ в модели Клейна. Эти прямые, аналогично бесконечно удалённым точкам, не имеют ориентации.

Связь гиперкомплексных чисел с различными типами геометрий

Евклидова геометрия

Для обоснования мнимых геометрических образов рассматриваются комплексные евклидовы пространства. N-мерным комплексным евклидовым пространством $R_n(i)$ называется множество элементов двух родов — точек и векторов, которые удовлетворяют аксиомам, получающимся из аксиом пространства R_n заменой операции умножения вектора на вещественное число операцией умножения вектора на комплексное число и заменой слова «вещественный» на слово «комплексный» [6].

В пространстве $R_n(i)$ определяются m-мерные плоскости, при m = 1 прямые линии, при m = n — 1 гиперплоскости и их параллельность, так же, как в пространстве R_n. Аналогичным образом определяются координаты векторов и точек в пространстве, длина вектора, ортонормированный базис единичных векторов и n-мерное комплексное полуевклидово пространство ${}^{(d)}R_n(i)$. Если на m-мерной плоскости пространства $R_n(i)$ можно выбрать ортонормированный базис из m векторов, то эта плоскость является пространством $R_m(i)$ и называется евклидовой плоскостью.

Геометрия Галилея

Если интерпретировать дуальные числа точками плоскости аналогично комплексным числам, то образуется плоскость, на которой расстояние между любыми точками и угол между парой пересекающихся прямых определяются особым образом, то есть дуальные числа возможно интерпретировать только точками неевклидовой плоскости, точнее – точками в геометрии Галилея.

Движения дуальной плоскости, под которыми понимают изменение плоскости, которое сохраняет промежуток между точками, осуществляются посредством преобразований. Преобразования переводят прямые в прямые (в том числе параллельные), сохраняют пропорциональность отрезков, принадлежащих одной прямой, и площадь [7].

Геометрия Минковского

Алгебра двойных чисел сопряжена с 2-мерным пространством-временем Минковского и применяется в 2-мерной СТО и 2-мерной электродинамике. Геометрические аспекты алгебры двойных чисел основаны на векторных

операциях, алгебре изометрий, коалгебре и внутренней системе отчёта. Алгебре двойных чисел ставится в соответствие геометрия двумерного псевдоевклидова пространства-времени, в котором появляется фундаментальный физический объект, которого в вещественном виде нет ни в одном евклидовом пространстве – световой конус, то есть множество точек, расстояния до которых от фиксированной точки равняются нулю. Точкам и векторам светового конуса естественным образом ставятся в соответствие делители нуля алгебры двойных чисел [8].

Заключение

Связи между геометрией дробно-линейных преобразований и алгеброй гиперкомплексных чисел чрезвычайно разнообразны и плодотворны. Учение сперва об обыкновенных комплексных, а затем и о гиперкомплексных числах возникло изначально в рамках алгебры, однако оказалось весьма тесно связанным с геометрией. Типы гиперкомплексных чисел ранга два образуют свои алгебры, геометрические интерпретации которых нашли широкое применение в практической деятельности.

Список литературы

1. Математика, её содержание, методы и значение, т. 3, М., 1956, гл. 20.
2. Комплексное число // Математическая энциклопедия (в 5 томах). — М.: Советская Энциклопедия, 1979. — Т. 2. — С. 1007.
3. Яглом И.М. Комплексные числа и их применение в геометрии. — Изд. 2-е, стереотипное. – М.: Едиториал УРСС, 2004. — 192 с.
4. Математическое просвещение, серия 2, 1961, выпуск 6, С. 61-106.
5. Репникова Е.Н., Мелентьев А.И. Геометрия дробно-линейных преобразований над алгеброй дуальных чисел. – Усть-Каменогорск: Вестник КАСУ №1, 2007. – С. 215-218.
6. Розенфельд Б.А. Неевклидовы геометрии. – М.: Гостехиздат, 1955. – гл. I, V, С.56-57, 434-449.
7. Яглом И.М. Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия. – М.: Наука, 1969. – С. 13-68.

8. Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Гиперболическая теория поля на плоскости двойной переменной. – Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, № 1 (13), том 7, 2010. – С. 78-127.

List of references

1. Mathematics, its content, methods and meaning, vol. 3, M., 1956, ch. 20.
2. Complex number // Mathematical encyclopedia (in 5 volumes). - Moscow: Soviet Encyclopedia, 1979 .-- T. 2. - P. 1007.
3. Yaglom I.M. Complex numbers and their applications in geometry. - Ed. 2nd, stereotyped. - M .: Editorial URSS, 2004 .-- 192 p.
4. Mathematical education, series 2, 1961, issue 6, pp. 61-106.
5. Repnikova E.N., Melent'ev A.I. The geometry of linear fractional transformations over the algebra of dual numbers. - Ust-Kamenogorsk: Bulletin of KAFU No. 1, 2007. - P. 215-218.
6. Rosenfeld B.A. Non-Euclidean geometries. - M .: Gostekhizdat, 1955 .-- Ch. I, V, pp. 56-57, 434-449.
7. Yaglom I.M. Galileo's principle of relativity and non-Euclidean geometry. - M .: Nauka, 1969 .-- S. 13-68.
8. Pavlov D.G., Kokarev S.S. Hyperbolic field theory in the double variable plane. - Hypercomplex numbers in geometry and physics, No. 1 (13), volume 7, 2010. - P. 78-127.