АКСИОМАТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ПОСТРОЕНИЮ ГЕОМЕТРИИ РИМАНА

AXIOMATIC APPROACH TO CONSTRUCTION RIEMANN'S GEOMETRY

УДК 514.135.01

Баев Дмитрий Александрович, Студент кафедры кибербезопасности информационных систем, Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону

Baev D.A. fantom-sj@yandex.ru

Аннотация

В данной статье рассматривается аксиоматический подход к построению теорий, в частности геометрии Римана. В ходе исследования рассмотрены первые три аксиомы данной теории и процесс того как делая выводы на основе данных теорем были определены такие понятия как прямая, плоскость и прямая пучка. Также был рассмотрен процесс пересечения прямых на плоскости и каким образом происходит определение угла их пересечения. В завершении также были рассмотрены варианты практического применения данной теории в двух различных областях.

Annotation

This article discusses the axiomatic approach to the construction of theories, in particular the geometry of Riemann. In the course of the research, the first three axioms of this theory and the process of how, drawing conclusions based on these theorems, such concepts as a straight line, a plane and a straight line of a beam were

defined. The process of intersection of straight lines on a plane was also considered and how the angle of their intersection is determined. In the end, options for the practical application of this theory in two different areas were also considered.

Ключевые слова: аксиома, аксиоматический подход, геометрия, неевклидова геометрия, геометрия Римана.

Keywords: axiom, axiomatic approach, geometry, non-Euclidean geometry, Riemann geometry.

Понятие «доказательства» составляет основу математики. Изучением природы этого понятия занималось ни одно поколение математиков, начиная с работ Архимеда, Евклида, Гаусса и др. «Доказательство» является математическим объектом и изучается с помощью инструментов современной математики. Теория доказательств началась с программы Гильберта, который был лидером школы формализма, основанной на аксиоматическом подходе к математическим рассуждениям. Он считал, что все математические теоремы можно получить на основе правил вывода из ограниченного числа аксиом за конечное число шагов. Теорема Геделя о неполноте показала, что программа Гильберта неосуществима. Согласно этой теореме, если выбрать в качестве аксиом любое множество истинных арифметических высказываний и требовать, чтобы доказательства, которые можно сделать на их основе, могли быть проверены алгоритмически, то будет по крайней мере одно истинное высказывание, которое не может быть доказано на основе этих аксиом. Открытие неевклидовых геометрий, в частности геометрии Римана, также изменило аксиоматический метод.

В основе неё лежат простые истины, принятые за аксиомы на основе которых и строятся все остальные высказывания. А именно прямую теперь следует рассматривать как замкнутую линию, и, следовательно, утверждение «*точка находится между…*» является не однозначным и требует некоторых оговорок.

Допустим имеется окружность, на которой расположены три точки *A*, *B* и *C*, тогда точки *A* и *B* делят окружность на две дуги. То с равным по силе утверждением можно говорить, что точка *C* одновременно лежит и не лежит между точками *A* и *B,* и понятие «*между*» теряет свой смысл. Тем не менее если обозначить на окружности ещё одну точку *D*, то можно сказать что точки *C* и *D*, могут принадлежать одной и той же дуге *AB*, а могут принадлежать различным, что в свою очередь представляет собой первую аксиому: *«Если*

пара A и B являются различными точками, то существуют такие точки C, D для которых справедливо разделение $AB|CD$*»* (рисунок 1).

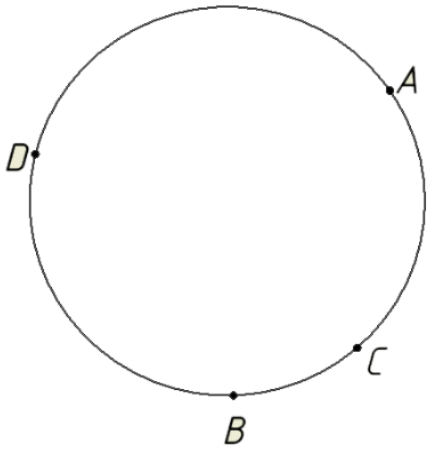

Рисунок 1 – Наглядное представление первой аксиомы в геометрии Римана

Исходя из того, что точки A и B разделяют прямую на две совокупности точек, то для того чтобы различать эти совокупности необходимо проделать следующие рассуждения. Возьмём четыре точки A, B, C и D, так что $AB|CD$. Тогда совокупность произвольно взятых точек X, для которых имеет место разделение $AB|CX$ будет обозначаться $(AB)_C$. Чтобы получить отрезок достаточно чтобы полученная совокупность включала и сами точки A и B, являющимися началом и концом отрезка $[AB]_C$.

Подобным образом совокупность точек $(AB)_D$, составляют отрезок $[AB]_D$. При этом отрезки $[AB]_C$ и $[AB]_D$ при наличии условия $AB|CD$ называются взаимно-дополнительными, а совокупности $(AB)_C$ и $(AB)_D$ общих точек иметь не будут.

Изучив что же представляет из себя отрезок можно дать определение прямой: *«Прямая AB есть класс точек, слагающихся из обоих взаимно-дополнительных отрезков* $[AB]$*»*.

Из этого можно сделать вывод, что две различные точки могут определять только прямую и притом только одну. Для того чтобы перейти к определению плоскости необходимо принять следующую вторую аксиому: *«Существует точка, не принадлежащая данной прямой»*.

Теперь же, чтобы определить плоскость необходимо представить прямую a и точку A находящуюся в произвольном месте и не принадлежащую прямой a. Таким образом совокупность прямых, проходящих через точку A, а также пересекающих прямую a будут называться пучком с центром в точке A, где прямая a будет являться его направляющей. Из этого можно сделать вывод,

что плоскостью, будет называться совокупность точек данного пучка, и обозначаться *aA*.

Основополагающей плоскости является трёхсторонник. Для его определения зададим три различные точки *A*, *B* и *C* являющиеся его вершинами, тогда прямые *AB*, *BC* и *CA* соответственно являются его сторонами.

Третья аксиома в геометрии Римана гласит: *«Прямая, пересекающая какие-либо две прямые данного трёхсторонника не в их общей вершине пересекает и третью его прямую»*.

Данная аксиома позволяет доказать главную особенность геометрии Риман, а именно – все прямые, лежащие в одной плоскости пересекаются и, следовательно, не существует параллельных прямых.

Эта аксиома приводит к следующему утверждению: зададим различные точки *K* и *L*, принадлежащие плоскости *aA*, следовательно, прямая *KL* пересекается с прямой *a*. Это вытекает из того что точки *A*, *K*, *L* образовывающие трехсторонник в котором точки *K* и *L* не лежащие на прямой *a*, образуют с точкой *A* прямые *AK* и *AL* пересекающиеся с прямой *a* и тогда следуя третей аксиоме, прямая *a* пересекается с прямой *KL* (рисунок 2).

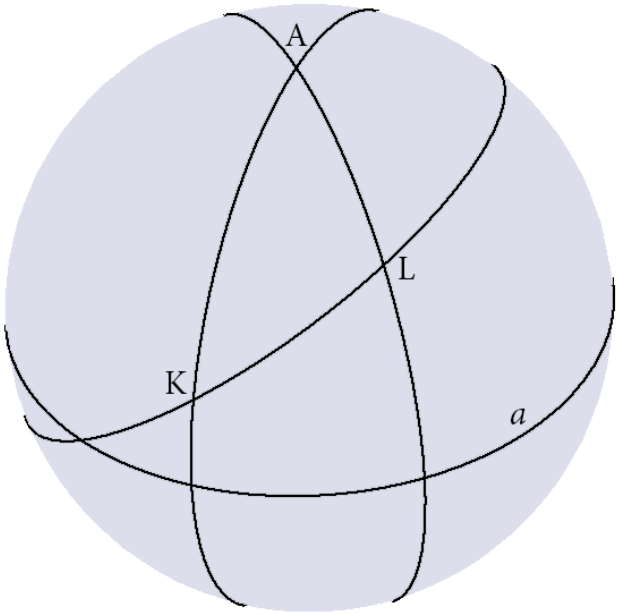

Рисунок 2 – Пересечение прямых на плоскости в геометрии Римана

Перед тем как дать определение какой-либо фигуре необходимо определить отношение двух прямых, а именно угол между ними. Для этого необходима следующая аксиома: *«Если четыре прямых пучка пересекают две какие-нибудь прямые соответственно в точках A, B, C, D и A_1, B_1, C_1, D_1 и*

если имеет место разделение AB|CD, то всегда имеет место также разделение $A_1B_1|C_1D_1$».

Следствием данной аксиомы будет являться то, что прямые пучка также будут устанавливать отношение $ab|cd$ в том случае если установлено отношение $AB|CD$ их точек пересечения с прямой в плоскости пучка и не принадлежащей ему. Таким образом разделение пар прямых $ab|cd$ сохраняет такие же свойства, как и у разделения пар точек $AB|CD$ и, следовательно, к ним применимо определение угла подобное определению отрезка, с той лишь разницей, что слово *«точка»* заменяется на *«прямая пучка»* и, следовательно, заменяются и обозначения точек на обозначение прямых.

Полученное определение примет следующий вид: Возьмём две прямые a и b, принадлежащие пучку с центром в точке O, также возьмем ещё две прямые c и d, так чтобы $ab|cd$. Тогда произвольная совокупность прямых x, для которых справедливо $ab|cx$ будет обозначаться $(ab)_c$. Присоединив к этой совокупности прямые a и b получим угол $[ab]_c$. Подобно углу $[ab]_c$ можно также получить и угол $[ab]_d$, являющийся взаимно-дополнительным или смежным к углу $[ab]_c$.

Уникальные идеи и методы, предложенные Риманом открыли новые пути для развития математики и нашли применение в физике, а именно в её разделе – астрономии. Так, например, с помощью формулы сферического треугольника можно вычислить радиус планеты. Ведь по сути радиус является внутренней характеристикой планеты, поэтому определяется довольно сложно, но гораздо проще, вычислив площадь конкретного планетарного сферического треугольника и измерив его углы, затем вычислить радиус. Также применение Римановой геометрии нашли и в мореплавании, где с помощью теоремы косинусов для сферического треугольника определяют расстояние между двумя точками земной поверхности.

Литература:

1. Лихтарников Л. М., Сукачева Т. Г. Математическая логика. Курс лекций. Серия «Учебники для вузов. Специальная литература» / Оформление обложки С. Л. Шапиро, А. А. Олексенко. — СПб.: Издательство «Лань», 1999. — 288 с.
2. Богомолов, С.А. Введение в неевклидову геометрию Римана / Проф. С.А. Богомолов. - Л. ; М. : ОНТИ. Гос. технико-теорет. изд-во, 1934. - 226 с.
3. Carlos M. Madrid Casado Наука. Величайшие теории: выпуск 34: Вначале была аксиома. Гильберт. Основания математики. — Издательство «Де Агостини», 2015 – 161 с.

Literature

1. Likhtarnikov LM, Sukacheva TG Mathematical logic. Lecture course. Series “Textbooks for universities. Special Literature "/ Cover design S. L. Shapiro, A. A. Oleksenko. - SPb .: Publishing house "Lan", 1999. - 288 p.
2. Bogomolov, S.A. Introduction to non-Euclidean Riemann geometry / Prof. S.A. Bogomolov. - L.; M.: ONTI. State technical-theorist. publishing house, 1934 .-- 226 p.
3. Carlos M. Madrid Casado Science. Greatest Theories: Issue 34: In the beginning there was an axiom. Gilbert. Foundations of mathematics. - Publishing house "De Agostini", 2015 - 161 p.