ЧИСЛО ГРЭМА

THE GRAHAM NUMBER

УДК 511

Туманова Анастасия Александровна, курсант, МосУ МВД России им. В. Я. Кикотя, Россия, г. Москва

Путилов Артур Олегович, Старший преподаватель кафедры, ЕНД УНК ИТ МосУ МВД России им. В. Я. Кикотя, 10.05.05 – Безопасность информационных технологий в правоохранительной сфере

A.A. Tumanova

A.O. Putilov

Аннотация

В статье рассматривается Число Грэма — это огромное число, которое является верхней границей для решения некой проблемы в теории Рамсея. Является некоторой очень большой степенью тройки, которая записывается с помощью нотации Кнута. Названо в честь Рональда Грэма.

Число Грэма в невообразимое количество раз больше, чем другие хорошо известные большие числа, такие, как гугол, гуголплекс и даже больше, чем число Скьюза и число Мозера. На самом деле вся наблюдаемая вселенная слишком мала для того, чтобы вместить в себя обыкновенную десятичную запись числа Грэма.

Annotation

The article considers the Graham Number — which is a huge number that is an upper bound for solving a certain problem in Ramsey theory. Is some very large power of a triple, which is written using Knuth notation. Named after Ronald Graham.

The Graham number is an unimaginable number of times larger than other well-known large numbers, such as googol, googolplex, and even more than the Skuse number and the Moser number. In fact, the entire observable universe is too small to accommodate an ordinary decimal notation of the Graham number.

Ключевые слова: Число Грэма, теория Рамсея, большие числа, комбинаторика, стрелочная нотация Кнута.

Keywords: Graham number, Ramsey theory, large numbers, combinatorics, Knuth arrow notation.

Для того чтобы понять суть числа Грэма, для начала стоит осознать, как его получили. Число Грэма возникло в работе решения задачи в теории Рамсея. Эти задачи на комбинаторику, который придумал математиком Франком Рамсеем. Смысл в том, что берётся любая математическая фигура и предлагается условие, которое должно выполниться. Также существует какой-то n-мерный гиперкуб. Все пары его вершины должны соединиться так, чтобы получился полный граф с 2n вершинами. Каждое его ребро раскрашивают в синий или в красный цвет (рис. 1). Надо найти, какое наименьшее число вершин должно быть у гиперкуба, чтобы каждый такой рисунок содержал полный одноцветный подграф с 4 вершинами, лежащими в одной плоскости (рис. 2).

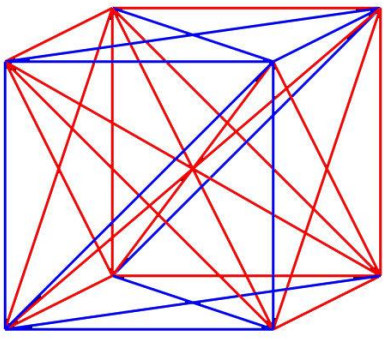


Рис. 1. Раскрашенные рёбра фигуры

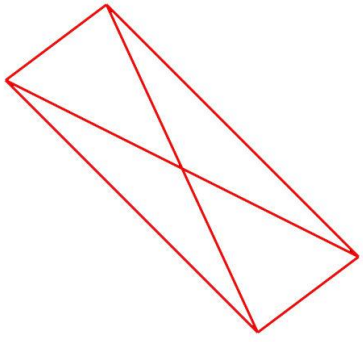


Рис. 2. Одноцветный подграф с 4 вершинами

Грэм не смог математически доказать вероятность выполнения условий задачи в семимерном, восьмимерном, девятимерном и других кубах. Но вот это «и других» оказалось, что не уходит в бесконечность, а уходит в число Грэма.

В 1971 году Грэм доказал, что существует решение (количество размерности), оно проходит между числом 6 и некоторым большим числом. В 2008 году усовершенствовали доказательство, теперь искомое количество размерностей стало проходить между числом 13 и числом Грэма.

В 1980-ом году его внесли в книгу рекордов Гиннесса, как "самое большое число, когда–либо участвовавшее в строгом математическом доказательстве" в то время.

Попробуем понять насколько оно велико. Самое большое число, которое имело некий физический смысл 10^185 - объём видимой вселенной с точки зрения планковских величин.

Для начала приступим к числу намного меньше, чем число Грэма. Это маленькое число назовём g1 и запишем его шестью знаками:

$g_1 = 3\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3$

Число g_1 равно "три, четыре стрелочки, три". Что это означает? Это способ записи, называемый стрелочная нотация Кнута. Можно прочитать в Википедии в деталях - там формулы. Для простого понятия объясню своими словами.

Одна стрелочка – это обыкновенное возведение в степень.

$2\uparrow 2 = 2^2 = 4$

$3\uparrow 3 = 3^3 = 27$

$5\uparrow 5 = 5^5 = 3125$

$10\uparrow 10 = 10^{10} = 10\ 000\ 000\ 000$

Две стрелочки означают возведение в степень степени.

$2\uparrow\uparrow 3 = 2\uparrow 2\uparrow 2 = 2^{22} = 2^4 = 16$

$3\uparrow\uparrow 3 = 3\uparrow 3\uparrow 3 = 3^{33} = 3^{27} = 7\ 625\ 597\ 484\ 987$ (больше 7 триллионов)

$3\uparrow\uparrow 4 = 3\uparrow 3\uparrow 3\uparrow 3 = 3^{333} = 3^{7\ 625\ 597\ 484\ 987}$ = число, в котором около 3 триллионов цифр

$3\uparrow\uparrow 5 = 3\uparrow 3\uparrow 3\uparrow 3\uparrow 3 = 3^{3333} = 3^{37\ 625\ 597\ 484\ 987} = 3$ в степени числа, в котором 3 триллиона цифр

В общем, "число, две стрелочки, другое число" показывает, какая высота степеней (математики говорят "башня") выстраивается из первого числа. Например 5↑↑8 представляет собой башню из восьми пятерок и оно настолько велико, что не может быть рассчитано ни на одном компьютере.

Итак, три стрелочки. В случае тройки у нас есть три высоты башни (в математике такого понятия нет, поэтому для простоты я его назвала "три башни"). Выглядит оно так:

$$3\uparrow\uparrow\uparrow 3 = 3\uparrow\uparrow 3\uparrow\uparrow 3 = 3\uparrow\uparrow(3\uparrow 3\uparrow 3) = \underbrace{3\uparrow 3\uparrow\ldots\uparrow 3}_{3\uparrow 3\uparrow 3 \text{ copies of } 3} = \underbrace{3\uparrow 3\uparrow\ldots\uparrow 3}_{7625597484987 \text{ copies of } 3}$$

То есть 3↑↑↑3 образует три башни из троек, высотой в 7 триллионов штук. Что это означает? Например, от Земли до Сатурна 100 триллионов сантиметров, но три башни — это не число длиной от Земли до Марса, это **башня степеней такой высоты**.

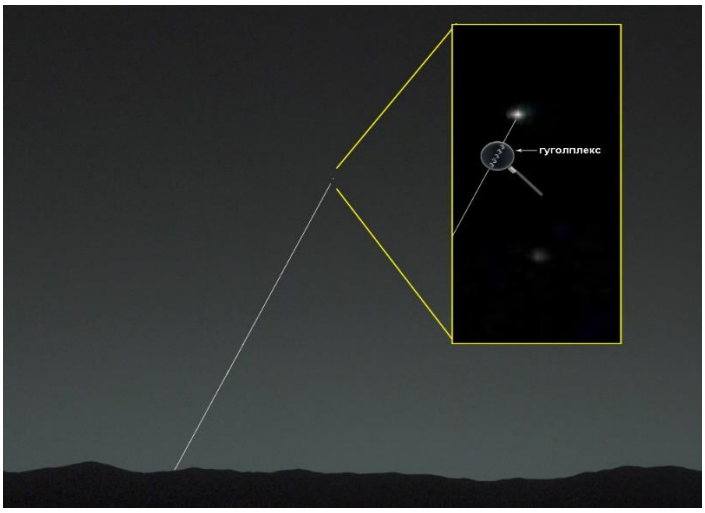


Рис. 3. Башня степеней

Теперь ясно, что 3↑↑↑4 = 3↑↑3↑↑3↑↑3 = 3↑↑3↑↑7 625 597 484 987 = 3↑↑ три башни, (не три в степени три башни, а "три, две стрелочки, три башни"(!)).

На 3↑↑↑5 = 3↑↑3↑↑3↑↑3↑↑3 заканчиваются слова, а на 3↑↑↑6 = 3↑↑3↑↑3↑↑3↑↑3↑↑3 в принципе невозможно описать.

Теперь, четыре стрелочки. Просто приведу картинку, на которой схема вычисления четырех стрелочек, когда каждое следующее число башни степеней определяет высоту башни степеней, определяющую высоту башни степеней и так далее.

$$g_1 = 3 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3 = 3 \uparrow\uparrow\uparrow (3 \uparrow\uparrow\uparrow 3) = 3 \uparrow\uparrow\uparrow \left(\underbrace{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}_{3^{3^3} \text{ copies of } 3} \right) = \left\{ \begin{array}{c} \underbrace{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}_{3^{3^3} \text{ copies of } 3} \\ \underbrace{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}_{3^{3^3} \text{ copies of } 3} \\ \vdots \\ \underbrace{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}_{3^{3^3} \text{ copies of } 3} \\ \underbrace{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}_{3^{3^3} \text{ copies of } 3} \end{array} \right\} \underbrace{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}_{3^{3^3} \text{ copies of } 3} \text{ layers}$$

Рассчитывать его смысла нет, всё равно не получится. Это число невозможно описать или представить. Если с тремя стрелочками еще хоть что–то можно было сказать, нарисовать три башни от Земли до Марса или как–то с чем–то соотнести, то тут сравнений просто нет.

Вот, что такое g_1, что такое 3↑↑↑↑3.

Вернёмся к числу Грэма. Каждый раз оно увеличивается от стрелочки к стрелочке?

3↑3 = 27

3↑↑3 = 7 625 597 484 987

3↑↑↑3 = башня, высотой от Земли до Марса.

3↑↑↑↑3 = число, которое невозможно ни представить ни описать. А представьте какие цифры будут потом, когда стрелок окажется семь, пятнадцать, сто.

Есть такое число как g_2, в котором количество этих стрелок оказывается равно g_1.

$$g_2 = 3 \underbrace{\uparrow\uparrow \cdots\cdots \uparrow\uparrow}\ 3$$

$$g_1 = 3 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3$$

Так же есть ещё g_3, в котором содержится g_2 стрелок. g_3, это не g_2 "в степени" g_2, а количество трёх башен, определяющих высоту трёх башен и так далее.

Ещё имеется число g_4, в котором содержится g_3 стрелочек между тройками. И так же существуют g_5, g_6 и g_7 и g_{17} и g_{43}...

В целом этих g 64 штуки. Каждое предыдущее численно равно количеству

стрелок в следующем. Последнее g_{64} и является числом Грэма. Это число размерностей гиперкуба, которого будет достаточно, чтобы правильно раскрасить отрезки красным и синим цветами. Может и меньше, это, можно просто сказать, верхняя граница. Ее записывают следующим образом: $G = f^{64}(4), \quad f(n) = 3 \uparrow^n 3,$ а расписывают так:

$$G = 3\underbrace{\uparrow\uparrow\cdots\cdots\cdots\cdots\uparrow}3 \Bigg\} 64 \text{ layers}$$
$$3\underbrace{\uparrow\uparrow\cdots\cdots\cdots\uparrow}3$$
$$\vdots$$
$$3\underbrace{\uparrow\uparrow\cdots\cdots\uparrow}3$$
$$3\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3$$

Существует теория о том, весьма эфемерная и философская, что всё, что человек мог себе представить или вообразить обязательно, когда–нибудь воплотится. Потому что развитие цивилизации определяется по тому, насколько она смогла воплотить в реальность фантазии прошлого.

Возможно через некоторое время человек либо дотянется до числа Грэма, либо дотронется до него рукой, либо ещё чего у него получится с ним сделать.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, число Грэма – это огромное число, которое является тонкой линией для решения конкретной проблемы в теории Рамсея. И является очень большой степенью тройки, которая записывается с помощью нотации Кнута.

ЛИТЕРАТУРА

1. Грэм, Р. Л.; Ротшильд, Б. Л. (1971). «Теорема Рамсея для наборов n-параметров». Труды Американского математического общества 159: 257-292. DOI:10.2307/1996010. Явная формула для N приведена на стр. 290.
2. Грэм, Р. Л.; Ротшильд, Б. Л. (1978). «Теория Рамсея», Исследования по комбинаторике, Рота, Г.-Г., ред., Математическая ассоциация Америки, 17:80-99. На стр. 90, указывая «наилучшую доступную оценку» для решения, явная формула для N повторяется из статьи 1971 года.

3. Гарднер, Мартин (ноябрь 1977). «Математические игры». Scientific American 237: 18-28.; перепечатано (пересмотрено в 2001 году) в следующей книге
4. Гарднер Мартин "Колоссальная книга по математике: классические головоломки, парадоксы и проблемы". — Нью-Йорк, Нью-Йорк: Нортон, 2001. — ISBN 0393020231
5. Гарднер Мартин Пенроуз Выложил плитки для шифров Люка. — Вашингтон, округ Колумбия: Математическая ассоциация Америки, 1989. — ISBN 0-88385-521-6
6. Эксоо, Джеффри (2003). «Евклидова проблема Рамсея». Дискретная вычислительная геометрия 29

LITERATURE

1. Graham, R.L.; Rothschild, B.L. (1971). "Ramsey's theorem for sets of n-parameters". Proceedings of the American Mathematical Society 159: 257-292. DOI: 10.2307 / 1996010. An explicit formula for N is given on page 290.
2. Graham, R.L.; Rothschild, B.L. (1978). "Ramsey Theory", Studies in Combinatorics, Rota, G.-G., ed., Mathematical Association of America, 17: 80-99. On page 90, presents the “best available estimate” for the solution, the explicit formula for N is repeated from the 1971 article.
3. Gardner, Martin (November 1977). "Mathematical games". Scientific American 237: 18-28.; reprinted (revised 2001) in next book
4. Gardner Martin "The Colossal Book of Mathematics: Classic Puzzles, Paradoxes and Problems." - New York, NY: Norton, 2001.-- ISBN 0393020231
5. Gardner Martin Penrose laid out the tiles for Luke's ciphers. - Washington, DC: Mathematical Association of America, 1989. - ISBN 0-88385-521-6
6. Exoo, Jeffrey (2003). "Euclidean Ramsey problem". Discrete Computational Geometry 29