Научная статья
Original article
УДК 528.024.4

ОСОБЕННОСТИ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ ПРОЕКТА И УРАВНИВАНИЯ ВЫСОТНОЙ СЕТИ, СОЗДАННОЙ ЭЛЕКТРОННЫМ ТАХЕОМЕТРОМ ПО ВЕЕРООБРАЗНОЙ СХЕМЕ

FEATURES OF EVALUATING THE ACCURACY OF THE PROJECT AND EQUALIZING THE HIGH-ALTITUDE NETWORK CREATED BY AN ELECTRONIC TOTAL STATION ACCORDING TO A FAN-SHAPED SCHEME

Клепиков И.В., кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой геодезии и земельного кадастра, Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова, Россия, г. Архангельск
Рыльщиков В.В., кандидат технических наук, доцент кафедры геодезии и земельного кадастра, Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова, Россия, г. Архангельск

Klepikov I.V., i.v.klepikov@mail.ru
Rylshchikov V.V., i.v.klepikov@mail.ru

Аннотация. Статья посвящена особенностям оценки точности и уравнивания высотных сетей, создаваемых методом высокоточного веерообразного тригонометрического нивелирования. Рассматриваются два возможных варианта выбора определяемых величин. В качестве определяемых величин можно рассматривать превышения между тахеометром и

наблюдаемыми целями или превышения между определяемыми, связующими точками. Каждый вариант имеет как положительные, так и отрицательные стороны. Доказано, что оба подхода приводят к одинаковым результатам. Приведены числовые примеры.

Abstract. The article is devoted to the peculiarities of assessment of the accuracy and adjustment of leveling networks created by the method of high-precision fan-shaped trigonometric leveling. Two possible options for choosing the determined values are considered. The elevations between the total station and the observed targets or the elevations between the determined nodal points can be considered as the determined values. Each option has both positive and negative sides. It is proved that both approaches lead to the same results. Numerical examples are given.

Ключевые слова: тригонометрическое нивелирование, электронный тахеометр, оценка точности, обратный вес отметки точки.

Keywords: trigonometric leveling, electronic total station, accuracy estimation, inverse weight of point height.

Высокоточное тригонометрическое нивелирование, выполняемое электронными тахеометрами по так называемой веерообразной схеме измерений, применяется для наблюдений за осадками инженерных сооружений достаточно давно. Такая схема измерений представляется наиболее эффективной, так как требуется меньшее количество станций, что ведет к сокращению затрат времени на производство работ [1-5]. Особенностью веерообразного тригонометрического нивелирования является то, что при оценке проекта высотной сети и при ее уравнивании необходимо учитывать корреляционные зависимости, возникающие в процессе измерений и в процессе их обработки. Кроме того, для оценки проекта высотной сети и для ее уравнивания возможны два разных подхода к выбору определяемых величин.

1. В высотной сети в качестве измеренных величин рассматриваются превышения h_i между тахеометром и наблюдаемыми целями (отражателями). Тогда неизвестными параметрами являются отметки узловых точек и отметки точки пересечения основных осей прибора на каждой станции (назовем их условно «отметки станций», понимая, что речь идет не об отметках точек, над которыми устанавливается тахеометр). Если в сети измерения выполнены с m станций на k узловых точек, то матрица коэффициентов нормальных уравнений будет иметь размерность $(m+k)\times(m+k)$.

2. В качестве измеренных величин можно рассматривать превышения H_{ij} между определяемыми (узловыми, связующими) точками. В этом случае неизвестными параметрами являются только отметки узловых точек, и матрица коэффициентов нормальных уравнений будет иметь размерность $k\times k$.

В первом варианте количество совместно решаемых уравнений значительно больше, чем во втором. Однако если на станции кроме узловых точек измерения выполнялись и на висячие, то при использовании второго варианта оценки точности проекта сети или при ее уравнивании все равно приходится вычислять отметки станций. Тогда вновь возникает задача уравнивания: превышения между узловыми точками получили поправки, и отметка станции определяется по измеренным превышениям h_i неоднозначно.

Не затрагивая здесь вопросы, связанные с вычислением отметок висячих точек и оценкой их точности, рассмотрим процедуру уравнительных вычислений и оценки точности для обоих указанных вариантов на моделях самых простых высотных сетей.

На рисунке 1 изображена схема измерений, включающая две станции и одну определяемую узловую точку. Измерено четыре превышения h_i – по два на каждой станции. При уравнивании по превышениям h_i (первый вариант) количество неизвестных равно трем. Пронумеруем неизвестные следующим

образом: 1 – отметка узловой точки, 2 – отметка *I* станции, 3 – отметка *II* станции. Тогда, в соответствии с теорией параметрического способа уравнивания [6], матрица коэффициентов уравнений поправок

$$A_{4\times3} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

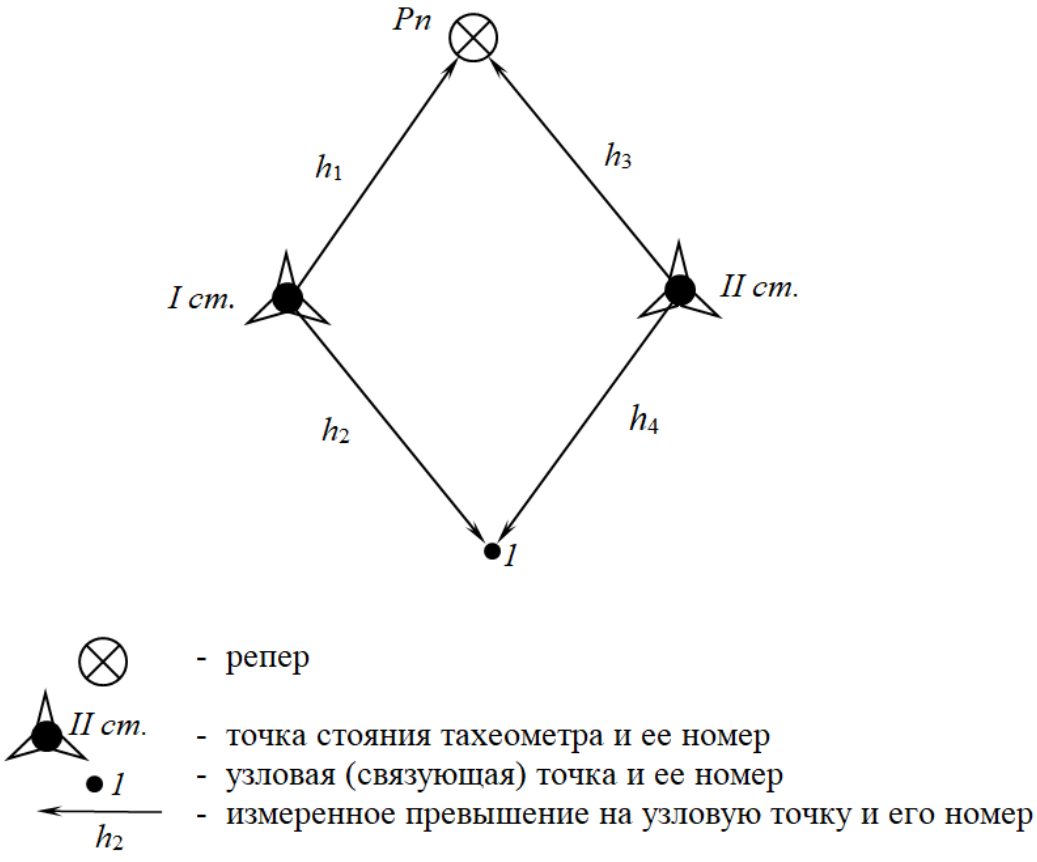

Рисунок 1. Схема измерений с одной определяемой узловой точкой

Превышения, измеренные на каждой станции, коррелированы только между собой, поэтому матрица весов измеренных превышений $P_h = Q_h^{-1}$, где

$$Q_h = \frac{1}{\mu^2} K_h = \frac{1}{\mu^2} \begin{pmatrix} m_{h_1}^2 & K_{h_1h_2} & 0 & 0 \\ K_{h_1h_2} & m_{h_2}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{h_3}^2 & K_{h_3h_4} \\ 0 & 0 & K_{h_3h_4} & m_{h_4}^2 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где μ – средняя квадратическая ошибка единицы веса, а дисперсии превышений $m_{h_i}^2$ и корреляционные моменты $K_{h_ih_j}$ [4]

$$m_{h_i}^2 = m_S^2 \cos^2 z_i + S_i^2 \sin^2 z_i \frac{m_z^2}{\rho^2}, \quad (2)$$

$$K_{h_{ij}} = K_{h_ih_j} = S_i S_j \sin z_i \sin z_j \frac{K_z}{\rho^2}, \quad (3)$$

где S_i, z_i – наклонные дальности и зенитные расстояния на визирные цели;

m_z – средняя квадратическая ошибка измерения зенитных расстояний;

K_z – ковариация между зенитными расстояниями.

Матрица обратных весов уравненных отметок неизвестных

$$\underset{3\times3}{Q} = (A^{\mathrm{T}} P_h A)^{-1}, \quad (4)$$

где Q_{11} – обратный вес узловой точки; Q_{22}, Q_{33} – обратные веса отметок, соответственно, первой и второй станций.

Соответствующие средние квадратические ошибки

$$m_i = \mu\sqrt{Q_{ii}}. \quad (5)$$

Пример 1. Для модели сети, изображенной на рисунке 1, для простоты примем зенитные расстояния на все визирные цели 90°, а наклонные дальности – 20 м. Пусть средние квадратические ошибки измерения зенитных расстояний и наклонных дальностей, соответственно, равны 2" и 2 мм. Предполагаем, что после определения места зенита (нуля) вертикального круга тахеометра осуществлялось однократное наведение на каждую цель. Приняв, для примера, среднюю квадратическую ошибку μ единицы веса, равной 0,24 мм.

Тогда, будем иметь:

$$K_h = \begin{pmatrix} 0{,}1128 & 0{,}0376 & 0 & 0 \\ 0{,}0376 & 0{,}1128 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}1128 & 0{,}0376 \\ 0 & 0 & 0{,}0376 & 0{,}1128 \end{pmatrix};$$

$$Q_h = \frac{1}{\mu^2} K_h = \begin{pmatrix} 1{,}9587 & 0{,}6529 & 0 & 0 \\ 0{,}6529 & 1{,}9587 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}9587 & 0{,}6529 \\ 0 & 0 & 0{,}6529 & 1{,}9587 \end{pmatrix};$$

$$\underset{3\times3}{Q} = (A^{\mathrm{T}} P_h A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}3058 & 0{,}6529 & 0{,}6529 \\ 0{,}6529 & 1{,}6323 & 0{,}3265 \\ 0{,}6529 & 0{,}3265 & 1{,}6323 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, обратный вес узловой точки равен 1,3058. Как следует из полученных результатов, ошибка отметки узловой точки меньше ошибок станций.

Если выполнять оценку проекта или уравнивание по превышениям между узловыми (связующими) точками, для рассматриваемой высотной сети будем иметь схему (рисунок 2) с двумя превышениями ($H_{12} = h_2 - h_1$, $H_{34} = h_4 - h_3$) и одной определяемой узловой точкой.

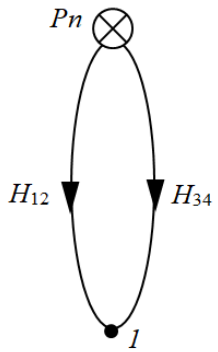

Рисунок 2. Вычисляемые превышения на одну определяемую узловую точку

В этом случае матрица коэффициентов уравнений поправок

$$\underset{2\times1}{A}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

Обратные веса превышений H_{12} и H_{34} вычисляются по элементам матрицы (1)

$$Q_{H_{ij}}=\frac{1}{\mu^2}\left(K_{h_ih_j}+K_{h_{(i+1)}h_{(j+1)}}-K_{h_ih_{(j+1)}}-K_{h_{(i+1)}h_j}\right)=$$

$$=\frac{1}{\mu^2}\left(m_{h_i}^2+m_{h_j}^2-2K_{h_ih_j}\right). \qquad (6)$$

Поскольку превышения H_{12} и H_{34} линейно независимы, то матрица $P_H=Q_H^{-1}$ – диагональная размера 2×2, и обратный вес узловой точки для приведенного примера

$$Q=(A^{\mathrm{T}}P_HA)^{-1}=\frac{1}{P_{H_{12}}+P_{H_{34}}}.$$

Пример 2. В условиях *примера 1* для схемы, приведенной на рисунке 2, обратный вес определяемой узловой точки

$$Q=(A^{\mathrm{T}}P_HA)^{-1}=\frac{1}{P_{H_{12}}+P_{H_{34}}}=\frac{1}{0,3829+0,3829}=1,3058.$$

Таким образом, обратный вес узловой (связующей) точки при оценке точности и уравнивании по превышениям между связующими точками оказался точно таким же, как и в том случае, когда в качестве определяемых величин рассматриваются превышения от тахеометра до наблюдаемых целей.

Если на станции выполнены измерения более чем на две определяемые узловые точки (или исходные реперы), то при оценке проекта или уравнивании сети по превышениям H_{ij} следует помнить, что одно из вычисляемых превышений – тривиальное, фиктивное (линейно зависимое от остальных). За фиктивное можно принять любое из превышений на станции и исключить его –

ни на результаты уравнивания, ни на оценку точности выбор фиктивного превышения не повлияет.

Рассмотрим фрагмент высотной сети (рис.3), в которой измерения выполнены с двух станций на три связующие точки, две из которых – определяемые.

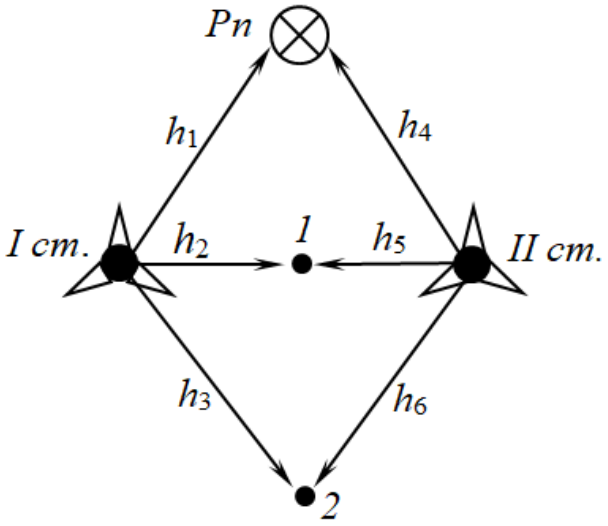

Рисунок 3. Схема измерений с двумя определяемыми узловыми точками

При оценке проекта сети и уравнивании по превышениям h_i, пронумеровав станции последними, матрица коэффициентов уравнений поправок

$$A_{6\times4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Матрица весов измеренных превышений $P_h = Q_h^{-1}$, где

$$Q_h = \frac{1}{\mu^2} K_h = \frac{1}{\mu^2} \begin{pmatrix} m_{h_1}^2 & K_{h_1h_2} & K_{h_1h_3} & 0 & 0 & 0 \\ K_{h_1h_2} & m_{h_2}^2 & K_{h_2h_3} & 0 & 0 & 0 \\ K_{h_1h_3} & K_{h_2h_3} & m_{h_3}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{h_4}^2 & K_{h_4h_5} & K_{h_4h_6} \\ 0 & 0 & 0 & K_{h_4h_5} & m_{h_5}^2 & K_{h_5h_6} \\ 0 & 0 & 0 & K_{h_4h_6} & K_{h_5h_6} & m_{h_6}^2 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Пример 3. Для модели сети, изображенной на рисунке 3, примем зенитные расстояния на все визирные цели 90°, а наклонные дальности от станций до репера и точки *2* – 20 м; от станций до точки *1* – 10 м . Средние квадратические ошибки измерения зенитных расстояний и наклонных дальностей также, соответственно, равны 2" и 2 мм. Предполагаем, что после определения места зенита (нуля) вертикального круга тахеометра осуществлялось однократное наведение на каждую цель. Средняя квадратическая ошибка μ единицы веса равна 0,24 мм.

При принятых условиях, будем иметь:

$$K_h = \begin{pmatrix} 0{,}1128 & 0{,}0188 & 0{,}0376 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}0188 & 0{,}0282 & 0{,}0188 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}0376 & 0{,}0188 & 0{,}1128 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}1128 & 0{,}0188 & 0{,}0376 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}0188 & 0{,}0282 & 0{,}0188 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}0376 & 0{,}0188 & 0{,}1128 \end{pmatrix};$$

$$Q_h = \begin{pmatrix} 1{,}9587 & 0{,}3264 & 0{,}6529 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}3264 & 0{,}4897 & 0{,}3264 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}6529 & 0{,}3264 & 1{,}9587 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1{,}9587 & 0{,}3264 & 0{,}6529 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}3264 & 0{,}4897 & 0{,}3264 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}6529 & 0{,}3264 & 1{,}9587 \end{pmatrix};$$

$$\underset{3\times3}{Q} = (A^{\mathrm{T}} P_h A)^{-1} = \begin{pmatrix} 0,8977 & 0,6529 & 0,8161 & 0,8161 \\ 0,6529 & 1,3058 & 0,6529 & 0,6529 \\ 0,8161 & 0,6529 & 1,2125 & 0,7462 \\ 0,8161 & 0,6529 & 0,7462 & 1,2125 \end{pmatrix}.$$

На главной диагонали матрицы $Q = (A^{\mathrm{T}} P_h A)^{-1}$ располагаются обратные веса определяемых неизвестных. Таким образом, обратный вес первой узловой точки равен 0,8977, а второй узловой точки – 1,3058, точно такой же, как и в примерах 1 и 2. Поскольку $\mu = 0,24$ мм, средние квадратические ошибки узловых точек: $m_1 = 0,23$ мм; $m_2 = 0,27$ мм. Ошибки станций: $m_I = 0,26$ мм; $m_{II} = 0,26$ мм.

При оценке проекта сети и уравнивании по превышениям H_{ij} от схемы измерений, приведенной на рисунке 3, можно перейти к девяти вариантам сети (без учета направлений превышений h_i), отбрасывая одно из трех превышений, которые можно вычислить на станции. Некоторые из возможных вариантов сети показаны на рисунке 4.

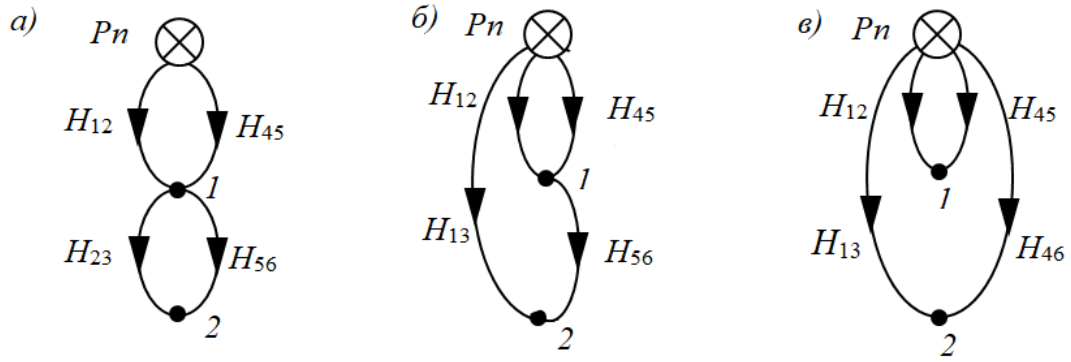

Рисунок 4. Вычисляемые превышения на две определяемые узловые точки

Матрица коэффициентов уравнений поправок для разных вариантов неодинакова. Так, для сети, изображенной на рисунке 4а, матрица

$$\underset{4\times 2}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обратные веса превышений H_{ij} вычисляются в соответствии с выражением (6) по элементам матрицы (7). Несмотря на то, что матрица A коэффициентов уравнений поправок и матрица P_H весов превышений для каждого варианта сети своя, матрица обратных весов уравненных неизвестных $Q = (A^{\mathrm{T}} P_H A)^{-1}$ будет одинакова для всех вариантов сети.

Пример 4. В условиях *примера 3* для схемы, приведенной на рисунке 4а, будем иметь:

$$P_H = \begin{pmatrix} 0,6017 & 0,1641 & 0 & 0 \\ 0,1641 & 0,6017 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6017 & 0,1641 \\ 0 & 0 & 0,1641 & 0,6017 \end{pmatrix};$$

$$Q = (A^{\mathrm{T}} P_H A)^{-1} = \begin{pmatrix} 0,8977 & 0,6529 \\ 0,6529 & 1,3058 \end{pmatrix}.$$

Полученная матрица одинакова для всех вариантов сети и полностью совпадает с левым верхним блоком матрицы Q, полученной при уравнивании сети по превышениям h_i.

Таким образом, результаты исследований на моделях показывают, что оценка точности и уравнивание по превышениям h_i между тахеометром и связующими (узловыми) точками и уравнивание по превышениям H_{ij} между связующими точками приводит к одним и тем же результатам: одинаковыми

будут отметки узлов, их обратные веса, средняя квадратическая ошибка единицы веса и, соответственно, средние квадратические ошибки узловых точек.

Использованные источники:

1. Никонов А.В., Рябова Н.М., Алексеев С.П. Исследование влияния хода фокусирующей линзы зрительной трубы электронного тахеометра на положение визирной оси // Интерэкспо ГЕО-Сибирь 2021. XVII Междунар. науч. конгр. : Междунар. науч. конф. «Электронное геопространство на службе общества» : сб. материалов в 8 т. (Новосибирск, 19-21 мая 2021 г.). − Новосибирск: СГГА, 2021. Т. 1. − С. 93–99. DOI: 10.33764/2618-981X-2021-1-93-99.
2. Никонов А.В. Опыт применения тригонометрического нивелирования с использованием электронных тахеометров для наблюдений за осадками сооружений // Интерэкспо ГЕО-Сибирь-2013. IX Междунар. науч. конгр. : Междунар. науч. конф. «Геодезия, геоинфор- матика, картография, маркшейдерия» : сб. материалов в 3 т. (Новосибирск, 15–26 апреля 2013 г.). – Новосибирск : СГГА, 2013. Т. 1. – С. 78–86.
3. Сексембаев С.Т., Кобелева Н.Н., Никонов А.В. Особенности геодезического мониторинга при наблюдении за осадками зданий и сооружений объектов энергетики в период строительства // Интерэкспо Гео-Сибирь. 2019. Т. 1. № 2. С. 39-47. DOI: 10.33764/2618-981X-2019-1-2-39-47.
4. Клепиков И.В., Рыльщиков В.В. Априорная оценка точности веерообразного тригонометрического нивелирования коротким лучом // The Scientific Heritage. 2022, № 83-1 (83). С. 39–46. DOI: 10.24412/9215-0365-2022-83-1-39-46
5. Клепиков И.В., Рыльщиков В.В. Определение весов превышений при веерообразном тригонометрическом нивелировании коротким лучом // The Scientific Heritage. 2022, № 84-1 (84). С. 45–51. DOI: 10.24412/9215-0365-2022-84-1-45-51

6. Голубев В.В. Теория математической обработки геодезических измерений : учебник / В. В. Голубев. — Вологда : Инфра-Инженерия, 2021. — 424 с.
7. Уставич Г.А., Китаев Г.Г., Никонов А.В., Сальников В.Г. Создание геодезической основы для строительства объектов энергетики // Изв. вузов. «Геодезия и аэрофотосъемка». – 2013. – № 4/С. – С. 48–54.
8. Китаев Г.Г., Никонов А.В. Схема построения высотной сети при наблюдениях за осадками зданий и сооружений на территории ТЭС / Интерэкспо ГЕО-Сибирь-2015. XI Междунар. науч. конгр. : Междунар. науч. конф. «Геодезия, геоинформатика, картография, маркшейдерия» : сб. материалов в 2 т. (Новосибирск, 13–25 апреля 2015 г.). – Новосибирск: СГУГиТ, 2015. Т. 1. – С. 28–33.
9. Никонов А. В., Рахымбердина М. Е. Исследование точности измерения превышений электронным тахеометром высокой точности в полевых условиях // Вестник СГГА. – 2013. – Вып. 1 (21). – С. 16–26.
10. Беспалов Ю.И., Дьяконов Ю.П., Терещенко Т.Ю. Наблюдение за осадками зданий и сооружений способом тригонометрического нивелирования // Геодезия и картография. – 2010. – № 8. – С. 8–10.

Sources used:

1. Nikonov A.V., Ryabova N.M., Alekseev S.P. Investigation of the effect of the course of the focusing lens of the optical tube of an electronic total station on the position of the sighting axis // Interexpo GEO-Siberia 2021. XVII International Scientific Conference : International Scientific Conference "Electronic Geospatial in the service of society" : collection of materials in 8 volumes (Novosibirsk, May 19-21, 2021). - Novosibirsk: SGGA, 2021. Vol. 1. - pp. 93-99. DOI: 10.33764/2618-981X-2021-1-93-99.
2. Nikonov A.V. Experience in the application of trigonometric leveling using electronic total stations for observing the precipitation of structures // Interexpo GEO-Siberia-2013. IX International Scientific Conference : International

Scientific Conference "Geodesy, geoinformatics, cartography, surveying" : collection of materials in 3 t. (Novosibirsk, April 15-26, 2013). Новосибирск Novosibirsk: SGGA, 2013. Vol. 1. C. pp. 78-86.

3. Seksembaev S.T., Kobeleva N.N., Nikonov A.V. Features of geodetic monitoring when observing precipitation of buildings and structures of energy facilities during construction // Interexpo Geo-Siberia. 2019. Vol. 1. No. 2. pp. 39-47. DOI: 10.33764/2618-981X-2019-1-2-39-47.
4. Klepikov I.V., Rylshchikov V.V. A priori estimation of the accuracy of fan-shaped trigonometric leveling with a short beam // The Scientific Heritage. 2022, No. 83-1 (83). C. 39-46. DOI: 10.24412/9215-0365-2022-83-1-39-46
5. Klepikov I.V., Rylshchikov V.V. Determination of excess weights during fan-shaped trigonometric leveling with a short beam // The Scientific Heritage. 2022, No. 84-1 (84). C. 45-51. DOI: 10.24412/9215-0365-2022-84-1-45-51
6. Golubev V.V. Theory of mathematical processing of geodetic measurements : textbook / V. V. Golubev. - Vologda : Infra-Engineering, 2021. - 424 p
7. Ustavich G.A., Kitaev G.G., Nikonov A.V., Salnikov V.G. Creation of a geodetic basis for the construction of energy facilities // Izv. vuzov. "Geodesy and aerial photography". - 2013. - No. 4/S. - pp. 48-54.
8. Kitaev G.G., Nikonov A.V. The scheme of building a high-altitude network during observations of precipitation of buildings and structures on the territory of thermal power plants / Interexpo GEO-Siberia-2015. XI International Scientific Conference : International Scientific Conference "Geodesy, geoinformatics, cartography, surveying" : collection of materials in 2 t. (Novosibirsk, April 13-25, 2015). - Novosibirsk: SGUGiT, 2015. Vol. 1. - pp. 28-33.
9. Nikonov A.V., Rakhymberdina M. E. Investigation of the accuracy of measuring exceedances with a high-precision electronic total station in the field // Bulletin of the SGGA. - 2013. - Issue 1 (21). - pp. 16-26.

10. Bespalov Yu.I., Dyakonov Yu.P., Tereshchenko T.Yu. Observation of precipitation of buildings and structures by trigonometric leveling // Geodesy and cartography. - 2010. - No. 8. - pp. 8-10.

© Клепиков И.В., Рыльщиков В.В., 2022 Научно-образовательный журнал для студентов и преподавателей «StudNet» №3/2022.

Для цитирования: Клепиков И.В., Рыльщиков В.В. ОСОБЕННОСТИ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ ПРОЕКТА И УРАВНИВАНИЯ ВЫСОТНОЙ СЕТИ, СОЗДАННОЙ ЭЛЕКТРОННЫМ ТАХЕОМЕТРОМ ПО ВЕЕРООБРАЗНОЙ СХЕМЕ// Научно-образовательный журнал для студентов и преподавателей «StudNet» №3/2022