Научная статья

Original article

УДК 528.441.2 + 528.115

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОЩАДЕЙ ЗЕМЕЛЬНЫХ УЧАСТКОВ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ НЕПОСРЕДСТВЕННЫХ ЗАВИСИМЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

ASSESSMENT OF THE ACCURACY OF DETERMINING THE AREAS OF LAND PLOTS BASED ON THE RESULTS OF DIRECT DEPENDENT MEASUREMENTS

Клепиков И.В., кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой геодезии и земельного кадастра, Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова, Россия, г. Архангельск

Рыльщиков В.В., кандидат технических наук, доцент кафедры геодезии и земельного кадастра, Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова, Россия, г. Архангельск

Klepikov I.V., i.v.klepikov@mail.ru

Rylshchikov V.V., i.v.klepikov@mail.ru

Аннотация. В статье рассматривается вопрос оценки точности определения площадей земельных участков по результатам измерений электронным тахеометром с учетом корреляционных зависимостей, возникающих при измерениях и обработке результатов измерений. Приведены числовые примеры. Показано, что пренебрежение корреляционной зависимостью в значительной степени искажает оценку точности площадей земельных участков.

Abstract. The article deals with the issue of assessing the accuracy of determining the areas of land plots based on the results of measurements by an electronic total station, taking into account the correlation dependencies that arise during measurements and processing of measurement results. Numerical examples are given. It is shown that neglecting the correlation dependence significantly distorts the estimation of the accuracy of land plots.

Ключевые слова: электронный тахеометр, площадь земельного участка, средняя квадратическая ошибка определения площади, корреляция.

Keywords: electronic total station, the area of the land plot, the average square error of determining the area, correlation.

Введение

Вопросам оценки точности определения площадей земельных участков посвящено достаточно большое количество работ, например, [1-11]. При этом рассматриваются все способы определения площадей: аналитический, графический, механический.

При использовании геодезического метода кадастровой съемки определение координат границ земельных участков обычно выполняют электронным тахеометром полярным способом с пунктов съемочных сетей. Оценка точности определения площадей в этом случае обычно рассматривается без учета корреляционных зависимостей, который возникают в процессе измерений.

В настоящей статье рассматривается оценка точности определения площадей земельных участков по результатам измерений с помощью электронного тахеометра.

Теоретическая часть

Сначала рассмотрим съемку электронным тахеометром отдельного участка с одной станции.

Как известно, площадь участка

$$p = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i (y_{i+1} - y_{i-1}) \quad \text{или} \quad p = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} y_i (x_{i-1} - x_{i+1}), \tag{1}$$

где x_i, y_i – координаты текущей точки; x_{i-1}, y_{i-1} – координаты предыдущей точки; x_{i+1}, y_{i+1} – координаты последующей точки.

Координаты x_i, y_i вычисляются по результатам измерений на станции.

Для вектора измерений X можно составить ковариационную матрицу K_X размерностью $2n \times 2n$, где n – число характерных точек. Матрица K_X не будет являться диагональной, т.к. вычисляемые углы на станции будут корреляционно зависимы.

Тогда ковариационную матрицу K_Y вектора координат Y можно вычислить в соответствии с обобщенной теоремой оценки точности функций:

$$\underset{2n\times 2n}{K_Y} = \underset{2n\times 2n}{A} \cdot \underset{2n\times 2n}{K_X} \cdot \underset{2n\times 2n}{A^{\mathrm{T}}}, \tag{2}$$

где матрица A – матрица производных вектора координат по измеренным величинам.

Вычисленные координаты, естественно, также будут зависимы.

Если имеется ковариационная матрица координат K_Y, то среднюю квадратическую ошибку (СКО) площади участка можно найти из выражения

$$m_p^2 = \underset{1\times 2n}{C} \cdot \underset{2n\times 2n}{K_Y} \cdot \underset{2n\times 1}{C^{\mathrm{T}}}, \tag{3}$$

где C – матрица-строка производных функции вида (1) по координатам граничных точек.

Вектор измерений

$$X = \begin{pmatrix} d_1 & \alpha_1 & d_2 & \alpha_2 & \dots & d_n & \alpha_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \tag{4}$$

где d_i, α_i – измеренные расстояния и дирекционные углы, причем

$$\alpha_i = \alpha_0 + \beta_i, \tag{5}$$

где β_i – горизонтальный угол, измеренный от исходного направления с дирекционным углом α_0.

За исходное направление чаще принимается направление на соседний пункт съемочной сети.

Измеренные углы β_i будут корреляционно зависимы с коэффициентом корреляции $r_\beta = +0,5$, так как имеют общее исходное направление. Именно этот момент обычно опускается при оценке точности. Ошибка исходного дирекционного угла в данном случае не приведет к изменению вычисляемой площади земельного участка. Возможен лишь «разворот» всего участка. Поэтому можно принять ошибку исходного дирекционного угла равной нулю. Таким образом

$$m_{\alpha_i} = \sqrt{m_{\alpha_0}^2 + m_{\beta_i}^2} = m_{\beta_i} \tag{6}$$

или

$$m_{\alpha_i} = m_{\beta_i} = m_\alpha = m_\beta . \tag{7}$$

Дирекционные углы α_i, вычисляемые через измеренные углы β_i, также будут корреляционно зависимы. Коэффициент корреляции дирекционных углов $r_\alpha = +0,5$.

Ковариация дирекционных углов

$$K_\alpha = r_\alpha \cdot m_\alpha \cdot m_\alpha = \frac{m_\alpha^2}{2} . \tag{8}$$

В общем виде ковариационная матрица вектора измерений

$$K_{\underset{2n\times 2n}{X}} = \begin{pmatrix} m_d^2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & m_\alpha^2 & 0 & \frac{m_\alpha^2}{2} & \cdots & 0 & \frac{m_\alpha^2}{2} \\ 0 & 0 & m_d^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_\alpha^2}{2} & 0 & m_\alpha^2 & \cdots & 0 & \frac{m_\alpha^2}{2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & m_d^2 & 0 \\ 0 & \frac{m_\alpha^2}{2} & 0 & \frac{m_\alpha^2}{2} & \cdots & 0 & m_\alpha^2 \end{pmatrix} . \tag{9}$$

Затем необходимо найти элементы матрицы A производных вектора координат характерных точек границ

$$Y = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & x_2 & y_2 & \cdots & x_n & y_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}. \tag{10}$$

Координаты определяемых точек

$$\left.\begin{aligned} x_i &= x_{\text{ст}} + d_i \cos\alpha_i \\ y_i &= y_{\text{ст}} + d_i \sin\alpha_i \end{aligned}\right\}, \tag{11}$$

где $x_{\text{ст}}$ и $y_{\text{ст}}$ – координаты станции.

В данной задаче определение координат выполняется с одной станции, следовательно, ошибки координат $x_{\text{ст}}$ и $y_{\text{ст}}$ на точность определения площади участка не окажут воздействия. Таким образом

$$m_{x_{\text{ст}}} = 0;\ m_{y_{\text{ст}}} = 0, \tag{12}$$

и формулы (11) можно преобразовать, сместив начало системы координат в точку стояния прибора:

$$\left.\begin{aligned} x_i &= d_i \cos\alpha_i \\ y_i &= d_i \sin\alpha_i \end{aligned}\right\}. \tag{13}$$

Элементы матрицы A, имеющей размерность $2n \times 2n$, представляют собой частные производные координат точек по измеряемым величинам:

$$\frac{\partial x_i}{\partial d_i} = \cos\alpha_i;\quad \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_i} = -\frac{d_i}{\rho}\sin\alpha_i;\quad \frac{\partial y_i}{\partial d_i} = \sin\alpha_i;\quad \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_i} = \frac{d_i}{\rho}\cos\alpha_i; \tag{14}$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial d_j} = 0;\quad \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} = 0;\quad \frac{\partial y_i}{\partial d_j} = 0;\quad \frac{\partial y_i}{\partial \alpha_j} = 0. \tag{15}$$

Перемножив матрицы в соответствии с выражением (2), получим ковариационную матрицу K_Y координат точек. Остается выполнить перемножение матриц в соответствии с выражением (3).

Матрица C в формуле (3) представляет собой строку с производными площади по координатам граничных точек:

$$\underset{1\times 2n}{C} = \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x_1} & \frac{\partial p}{\partial y_1} & \frac{\partial p}{\partial x_2} & \frac{\partial p}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial p}{\partial x_n} & \frac{\partial p}{\partial y_n} \end{pmatrix}, \tag{16}$$

где, с учетом вида формул (1),

$$\frac{\partial p}{\partial x_i}=\frac{1}{2}\left(y_{i+1}-y_{i-1}\right);\ \frac{\partial p}{\partial y_i}=\frac{1}{2}\left(x_{i-1}-x_{x+1}\right). \qquad (17)$$

Пример.

Приведем пример оценки точности площади модельного участка четырехугольной формы. Примем $m_d=10$ мм; $m_\beta=5''$. Результаты «измерений»:

$$d_1=50\,\text{м};\ d_2=110\,\text{м};\ d_3=140\,\text{м};\ d_4=80\,\text{м};$$

$$\alpha_1=20°;\ \alpha_2=40°;\ \alpha_3=50°;\ \alpha_4=70°.$$

Координаты характерных точек границ участка:

$x_1=46{,}985$ м; $y_1=17{,}101$см; $x_2=84{,}265$ м; $y_2=70{,}707$ м;

$x_3=89{,}990$ м; $y_3=107{,}246$ м; $x_4=27{,}362$ м; $y_4=75{,}175$ м.

Площадь участка p = 2660,87 м^2.

Ковариационная матрица углов и расстояний

$$K_{\underset{8\times8}{X}}=\begin{pmatrix}100&0&0&0&0&0&0&0\\0&25&0&12{,}5&0&12{,}5&0&12{,}5\\0&0&100&0&0&0&0&0\\0&12{,}5&0&25&0&12{,}5&0&12{,}5\\0&0&0&0&100&0&0&0\\0&12{,}5&0&12{,}5&0&25&0&12{,}5\\0&0&0&0&0&0&100&0\\0&12{,}5&0&12{,}5&0&12{,}5&0&25\end{pmatrix}.$$

Матрица производных

$$A_{\underset{8\times8}{}}=\begin{pmatrix}+0{,}940&-0{,}083&0&0&0&0&0&0\\+0{,}342&+0{,}228&0&0&0&0&0&0\\0&0&+0{,}766&-0{,}343&0&0&0&0\\0&0&+0{,}643&+0{,}409&0&0&0&0\\0&0&0&0&+0{,}643&-0{,}520&0&0\\0&0&0&0&+0{,}766&+0{,}436&0&0\\0&0&0&0&0&0&+0{,}342&-0{,}364\\0&0&0&0&0&0&+0{,}940&+0{,}133\end{pmatrix}.$$

Ковариационная матрица вектора координат характерных точек (запишем верхний треугольник симметричной матрицы)

$$K_{Y}_{8\times8} = \begin{pmatrix} 88,474 & +31,667 & +0,355 & -0,423 & +0,539 & -0,452 & +0,378 & -0,137 \\ & 12,995 & -0,976 & +1,163 & -1,480 & +1,242 & -1,038 & +0,378 \\ & & 61,620 & +45,739 & +2,228 & -1,869 & +1,562 & -0,568 \\ & & & 45,490 & -2,655 & +2,228 & -1,861 & +0,677 \\ & & & & 48,076 & +43,569 & +2,369 & -0,862 \\ & & & & & 63,441 & -1,988 & +0,723 \\ & & & & & & 15,019 & +30,931 \\ & & & & & & & 88,742 \end{pmatrix}.$$

Матрица-строка производных

$$C_{1\times8} = \begin{pmatrix} -2234 & -28452 & +45073 & -21503 & +2234 & +28452 & -45073 & +21503 \end{pmatrix}.$$

Выполнив перемножение матриц в соответствии с формулой (3), получим

$$m_p = 0,3567 \text{ м}^2$$

или, в виде относительной ошибки,

$$\frac{m_p}{p} = \frac{0,3567}{2660,87} \approx \frac{1}{7460}.$$

На практике чаще выполняется приближенная оценка точности определения площадей. При этом игнорируется рассмотренная выше корреляционная зависимость.

При выполнении приближенной оценки производные функции (1) имеют аналогичный вид. В связи с этим для участка в форме *n*-угольника после преобразований можно записать

$$m_p^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\left(y_2 - y_n\right)^2 m_{x_1}^2 + \left(x_n - x_2\right)^2 m_{y_1}^2 + \left(y_3 - y_1\right)^2 m_{x_2}^2 + \left(x_1 - x_3\right)^2 m_{y_2}^2 + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \left(y_1 - y_{n-1}\right)^2 m_{x_n}^2 + \left(x_{n-1} - x_1\right)^2 m_{y_n}^2 \right). \qquad (18)$$

При этом СКО координат поворотных точек находятся из выражений:

$$m_{x_i}^2 = \cos^2 \alpha_i \cdot m_d^2 + \frac{(d_i \sin \alpha_i)^2}{\rho^2} \cdot m_\alpha^2 = \cos^2 \alpha_i \cdot m_d^2 + \frac{\Delta y^2}{\rho^2} \cdot m_\alpha^2 , \qquad (19)$$

$$m_{y_i}^2 = \sin^2 \alpha_i \cdot m_d^2 + \frac{(d_i \cos \alpha_i)^2}{\rho^2} \cdot m_\alpha^2 = \sin^2 \alpha_i \cdot m_d^2 + \frac{\Delta x^2}{\rho^2} \cdot m_\alpha^2 \ . \qquad (20)$$

Приближенную оценку точности можно выполнить и по приведенному выше алгоритму, при этом необходимо лишь заменить на нули все недиагональные элементы ковариационных матриц K_X и K_Y.

Для примера, приведенного выше, в этом случае получим

$$m_p = 0,5294 \text{ м}^2,$$

или, в относительной мере

$$\frac{m_p}{p} = \frac{0,5294}{2660,87} \approx \frac{1}{5030}.$$

Как следует из полученных результатов, пренебрежение корреляционной зависимостью при заданных условиях ведет к искажению оценки точности на 33%. При этом, очевидно, что расхождение между результатами строгой и приближенной оценки будет зависеть от формы участка и точности измерений.

Если координаты характерных точек границ определяются с разных пунктов съемочной сети, то для оценки точности площади земельного участка следует выполнить аналогичные вычисления. После уравнивания сети будем иметь ковариационную матрицу координат пунктов сети $K_{\text{ст}}$. Имея известную ковариационную матрицу K_X измеряемых величин, корреляционную матрицу K_Y координат граничных точек можно найти из выражения

$$\underset{2n\times 2n}{K_Y} = \underset{2n\times 2m}{B} \cdot \underset{2m\times 2m}{K_{\text{ст}}} \cdot \underset{2m\times 2n}{B^{\text{T}}} + \underset{2n\times k}{A} \cdot \underset{k\times k}{K_X} \cdot \underset{k\times 2n}{A^{\text{T}}}. \qquad (21)$$

В формуле (21) матрица B – это матрица производных координат точек по координатам пунктов съемочной сети; матрица A – матрица производных вектора координат характерных точек по измеренным величинам; n – число характерных точек границ земельного участка; m – число пунктов съемочной сети; k – общее число измеренных величин на характерные точки.

Средняя квадратическая ошибка площади участка в этом случае также находится в соответствии с выражением (3).

Заключение

В настоящей статье приведен вопрос оценки точности определения площадей земельных участков по результатам измерений электронным тахеометром с учетом корреляционных зависимостей, возникающих при измерениях и обработке результатов измерений. Приведены числовые примеры. Показано, что пренебрежение корреляционной зависимостью может в значительной степени исказить оценку точности площадей земельных участков.

Использованные источники:

1. Маслов А. В., Юнусов А. Г. О точности вычисления площади по координатам точек контура // Труды МИИЗ. – 1974. – Вып. 70. – С. 19–26.
2. Михеев Д.Ш., Жозе Е.Б. О точности определения границ земельных участков // Информационный бюллетень. – 1997. – № 5 (12).
3. Крячок С.Д., Мамонтова Л.С., Щербак Ю.В. Обоснование точности определения площадей земельных участков полюсным методом // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия F. Строительство. Прикладные науки. 2019. № 16. С. 99-104.
4. Клюшниченко В.Н., Мартынов Г.П., Юрина Г.И. Об определении площади земельного участка в условиях отсутствия требуемого координатного обеспечения // Вестник СГУГиТ (Сибирского государственного университета геосистем и технологий). 2021. Т. 26. № 3. С. 138-146. DOI: 10.33764/2411-1759-2021-26-3-138-146.
5. Чуклин С.И. Определение площадей земельных участков сложной формы с оценкой точности // Приложение к журналу Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. Сборник статей по итогам научно-технической конференции. 2015. № 8. С. 86-88.
6. Маркузе М.Ю. Оценка точности определения площадей земельных участков застроенных территорий // автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук / Москва, 2000.

7. Терентьев Д.Ю. Сравнительный анализ определения относительной ошибки площадей земельных участков // Интерэкспо Гео-Сибирь. 2012. Т. 7. С. 37-42.
8. Купреева Е.Н., Морозова А.А. Исследование точности определения площадей земельных участков различными способами // Вестник Омского государственного аграрного университета. 2018. № 1 (29). С. 70-84.
9. Клещевникова В.И., Школьникова А.А., Дмитриева Е.Д., Иванова А.П. Сопоставление различных методов измерения площадей. // Alfabuild. 2018. №4(6). С. 7-14.
10. Крячок С.Д., Щербак Ю.В., Мамонтова Л.С. Использование полюсного метода определения координат на приаэродромной территории // Технические науки и технологии. 2018. № 3 (13). С. 258-268.
11. Определение площадей объектов недвижимости: Учебное пособие / Под ред. В. А. Коугия – 2-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2019. – 112 с.

Sources used:

1. Maslov A.V., Yunusov A. G. On the accuracy of calculating the area by the coordinates of contour points. Trudy MIIZ. - 1974. - Issue 70. - pp. 19-26.
2. Mikheev D.Sh., Jose E.B. On the accuracy of determining the boundaries of land plots // Information bulletin. – 1997. – № 5 (12).
3. Kryachok S.D., Mamontova L.S., Shcherbak Yu.V. Justification of the accuracy of determining the areas of land plots by the pole method // Bulletin of Polotsk State University. Series F. Construction. Applied sciences. 2019. No. 16. pp. 99-104.
4. Klyushnichenko V.N., Martynov G.P., Yurina G.I. On determining the area of a land plot in the absence of the required coordinate support // Bulletin of SGUGiT (Siberian State University of Geosystems and Technologies). 2021. Vol. 26. No. 3. pp. 138-146. DOI: 10.33764/2411-1759-2021-26-3-138-146.

5. Chuklin S.I. Determination of the areas of land plots of complex shape with an assessment of accuracy // Appendix to the journal Izvestiya vuzov. Geodesy and aerial photography. Collection of articles on the results of the scientific and technical conference. 2015. No. 8. pp. 86-88.
6. Markuse M.Yu. Assessment of the accuracy of determining the areas of land plots of built-up territories // abstract of the dissertation for the degree of Candidate of Technical Sciences / Moscow, 2000.
7. Terentyev D.Yu. Comparative analysis of determining the relative error of land plots // Interexpo Geo-Siberia. 2012. Vol. 7. pp. 37-42.
8. Kupreeva E.N., Morozova A.A. Investigation of the accuracy of determining the areas of land plots in various ways // Bulletin of Omsk State Agrarian University. 2018. No. 1 (29). pp. 70-84.
9. Kleshchevnikova V.I., Shkolnikova A.A., Dmitrieva E.D., Ivanova A.P. Comparison of various methods of measuring areas. // Alfabuild. 2018. No.4(6). pp. 7-14.
10. Kryachok S.D., Shcherbak Yu.V., Mamontova L.S. The use of the pole method for determining coordinates on the aerodrome territory // Technical Sciences and Technologies. 2018. No. 3 (13). pp. 258-268.
11. Determination of the areas of real estate objects: Textbook / Edited by V. A. Kougiya - 2nd ed., erased. - St. Petersburg: Publishing House "Lan", 2019. - 112 p.

© Клепиков И.В., Рыльщиков В.В., 2022 Научно-образовательный журнал для студентов и преподавателей «StudNet» №3/2022.

Для цитирования: Клепиков И.В., Рыльщиков В.В., ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОЩАДЕЙ ЗЕМЕЛЬНЫХ УЧАСТКОВ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ НЕПОСРЕДСТВЕННЫХ ЗАВИСМЫХ ИЗМЕРЕНИЙ// Научно-образовательный журнал для студентов и преподавателей «StudNet» №3/2022