Научная статья
Original article
УДК 519.872

ТЕОРИЯ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

QUEUING THEORY

Бушуева Виолетта Олеговна, Студент, ФГБОУ ВО «Кубанский государственный аграрный университет имени И. Т. Трубилина», г. Краснодар
Сергеев Александр Эдуардович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей, Математики, ФГБОУ ВО «Кубанский государственный аграрный университет имени И. Т. Трубилина», г. Краснодар

Bushueva Violetta Olegovna, Student, Kuban State Agrarian University named after I. T. Trubilin, Krasnodar
Sergeev Alexander Eduardovich, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Higher, Mathematicians, Kuban State Agrarian University named after I. T. Trubilin, Krasnodar

Аннотация: При исследовании операций часто приходится сталкиваться с системами, предназначенными для многоразового использования при решении однотипных задач. Возникающие при этом процессы получили название процессов обслуживания, а теория, объясняющая их возникновение – теории массового обслуживания. Заявки поступают в СМО обычно не постоянно, а случайно, образуя таким образом случайный поток заявок (требований). Обслуживание заявок, в целом, также не прекращается какое-то время. Непроизвольный характер потока заявок и

времени обслуживания приводит к тому, что СМО оказывается загруженной неравномерно. Предметами теории массового обслуживания считается создание точных математических моделей, объединяющих установленные требования работы СМО с показателями производительности СМО, описывающими ее умение справляться с потоком заказов.

Annotation: When researching operations, you often have to deal with systems designed for reusable use when solving the same type of tasks. The processes that arise in this case are called service processes, and the theory explaining their occurrence is the theory of queuing. Applications are usually received by the CFR not constantly, but randomly, thus forming a random stream of applications (requirements). The service of applications, in general, also does not stop for some time. The involuntary nature of the flow of applications and the service time leads to the fact that the CFR is unevenly loaded. The subjects of queuing theory are considered to be the creation of accurate mathematical models that combine the established requirements of the CFR with the performance indicators of the CFR, describing its ability to cope with the flow of orders.

Ключевые слова: массовое обслуживание, каналы обслуживания, случайный процесс, предельное состояние.

Keywords: mass maintenance, service channels, random process, limit state.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ. КЛАССИФИКАЦИЯ СМО.

При исследовании операций часто доводится встречаться с системами, специализированными с целью многоразового использования при решении однотипных задач. Образующиеся при этом процессы приобрели наименование процессов обслуживания, а системы – систем массового обслуживания (СМО). Образцами подобных систем являются телефонные системы, ремонтные мастерские, вычислительные комплексы, билетные кассы, магазины, парикмахерские и т.п.

Любая СМО складывается из конкретного количества обслуживающих единиц (устройств, приборов, станций, пунктов), которые станем именовать

каналами обслуживания. Каналами могут являться линии связи, рабочие точки, вычислительные машины, продавцы и др. Согласно количеству каналов СМО подразделяют на одноканальные и многоканальные.

Заявки поступают в СМО обычно не постоянно, а случайно, образуя таким образом случайный поток заявок (требований). Обслуживание заявок, в целом, также не прекращается какое-то время. Непроизвольный характер потока заявок и времени обслуживания приводит к тому, что СМО оказывается загруженной неравномерно: в какие-то периоды времени накапливается весьма огромное число заказов (они либо становятся в очередность, либо покидают СМО не обслуженными), в другие же этапы СМО функционирует с недогрузкой либо простаивает.

Предметами теории массового обслуживания считается создание точных математических моделей, объединяющих установленные требования работы СМО (количество символов, их эффективность, характера потока заявок и т.п.) с показателями производительности СМО, описывающими ее умение справляться с потоком заказов.

В качестве показателей эффективности СМО применяются: среднее количество заказов, обслуживаемых в единицу времени; среднее количество заказов в очереди; среднее время ожидания обслуживания; вероятность отказа в обслуживании без ожидания; вероятность того, что количество заказов в очередности превзойдет конкретное значение, и т.п.

СМО разделяют на два ключевых вида (класса): СМО с отказами и СМО с ожиданием (очередью). В СМО с отказами заявка, поступившая в момент, когда все без исключения каналы заняты, отклоняется, покидает СМО и в последующем ходе обслуживания не принимает участие (например, заявка на телефонный разговор в момент, когда все каналы заняты, получает отказ и покидает СМО необслуженной). В СМО с ожиданием заявка, пришедшая в момент, когда все каналы заняты, не уходит, а становится в очередь на обслуживание.

СМО вместе с ожиданием разделяются на некоторые разновидности, в зависимости от того, равно как организована очередь: с ограниченной или неограниченной длинной очереди, с ограниченным временем ожидания и т.п.

Для классификации СМО существенной значимостью обладает дисциплина обслуживания, определяющая порядок выбора заявок из числа поступивших и порядок распределения их среди свободных каналов. Согласно данного признака обслуживание заявки организовывается по принципу «первая пришла – первая обслужена», «последняя пришла – первая обслужена» (такой порядок может применяться, к примеру, при извлечении для обслуживания изделий со склада, ибо последние из них зачастую становятся более легкодоступными) или обслуживание с приоритетом (когда в первую очередь обслуживаются наиболее важные заявки). Преимущество может быть как абсолютным, когда более важная заявка «вытесняет» из-под обслуживания стандартную заявку (например, в случае аварийной ситуации плановые работы ремонтных бригад останавливаются вплоть до ликвидации аварии), так и относительным, если наиболее существенная заявка приобретает только «лучшее» место в очередности.

2. ПОНЯТИЕ МАРКОВСКОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА.

Процедура работы СМО представляет собой случайный процесс.

Под случайным (вероятностным или стохастическим) процессом подразумевается процесс изменения во времени состояния какой-либо системы согласно вероятностным закономерностям.

Процесс именуется процессом с дискретными состояниями, если его возможные состояния $S_1, S_2, S_3 \ldots$ можно предварительно упомянуть, а переход системы из состояния в состояние происходит моментально (скачком). Процесс именуется процессом с непрерывным, если моменты возможных переходов системы из состояния в состояние никак не фиксированы заранее, а случайны.

Процедура деятельности СМО предполагает непроизвольный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем. Это значит, что

состояние СМО изменяется скачком в неожиданные моменты появления каких-либо происшествий (к примеру, прихода новой заявки, завершения оказания услуг и т.п.).

Математическое исследование деятельности СМО значительно упрощается, в случае если процедура данной работы марковский процесс. Проивольный процесс называется марковским или случайным процессом без последствия, если для любого момента времени t_0 вероятностные характеристики процесса в будущем находятся в зависимости только лишь от его состояния в данный период t_0 и не зависят от того, когда и как система пришла в данное состояние.

Образец марковского процесса: система S - счетчик в такси. Состояние системы в момент t характеризуется количеством км (десятых долей км), пройденных автомобилем вплоть до данного момента. Пускай в момент t_0 расходомер показывает S_0. Вероятность того, что в момент $t > t_0$ расходомер продемонстрирует то или иное число км (конкретнее, соответствующее число рублей) S_1, зависит от S_0, однако никак не находится в зависимости от того, в какие моменты времени менялись показания счетчика до момента t_0.

Многочисленные процессы можно приближенно считать марковскими. К примеру, ход игры в шахматы; система S - группа шахматных фигур. Положение системы характеризуется количеством фигур соперника, оставшихся на доске в момент t_0. Вероятность того, что в момент $t > t_0$ материальное преимущество будет на стороне 1-го из противников, зависит в первую очередь от того, в каком состоянии находится система в этот момент t_0, а не от того, когда и в какой очередности пропали фигуры с доски до момента t_0.

При рассмотрении беспорядочных процессов с дискретными состояниями комфортно использовать геометрическую схему – так называемую графом состояний. Как правило состояния системы представляются прямоугольниками (кружочками), а вероятные переходы из

состояния в состояние – стрелками (ориентированными дугами), соединяющими состояния.

Задача 1. Построить граф состояний следующего случайного процесса: устройство S состоит из 2-ух узлов, каждый из которых в непроизвольный момент времени может выйти из строя, уже после чего моментально наступает восстановление узла, продолжающееся заранее неопределенное время.

Решение: Возможные состояния системы: S_0 - оба узла исправны; S_1 - первый узел ремонтируется, второй исправен; S_2 - второй узел ремонтируется, первый исправен; S_3 - оба узла ремонтируются. Граф системы приведен на рис. 1.

Стрелка направленная, например, из S_0 в S_1, означает переход системы в момент отказа первого узла, из S_1 в S_0 - переход в момент окончания ремонта этого узла.

На графе отсутствуют стрелки из S_0 в S_3 и из S_1 в S_2. Данное разъясняется тем, что выходы из узлов из строя планируются самостоятельными и независимыми друг от друга и, скажем, вероятностью синхронного выхода из строя двух узлов (переход из S_0 в S_3) либо синхронного завершения ремонтных работ двух узлов (переход из S_3 в S_0) можно пренебречь.

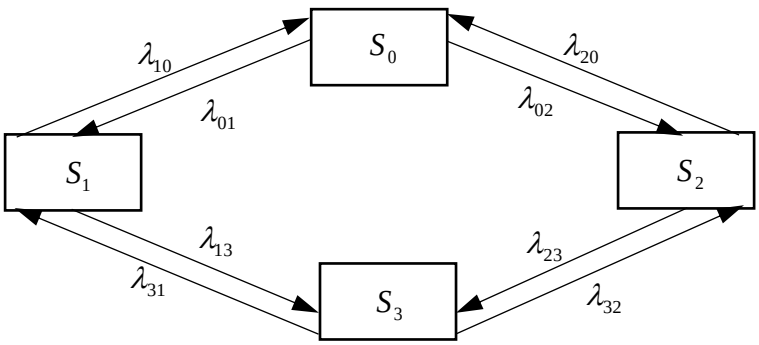


Рис. 1

С целью точного математического описания марковского случайного процесса с дискретными состояниями и непрерывным временем,

протекающего в СМО, познакомимся с одним из значимых определений теории вероятностей – понятием потока событий.

3. ПОТОК СОБЫТИЙ.

Под потоком событий подразумевается очередность однородных событий, последующих одно за другим в какие-либо беспорядочные моменты времени (как например, поток вызовов на телефонной станции, поток отказов ЭВМ, и т.п.)

Под характеризуется интенсивностью λ - частотой возникновения событий либо средним количеством событий, поступающих в СМО в единицу времени.

Поток событий получает название регулярный, в случае если действия следуют одно за другим через одинаковые промежутки времени. Как например, поток изделий на конвейере сборочного цеха (с постоянной скоростью движения) считается регулярным.

Поток событий называется неподвижным, в случае если его вероятностные свойства не зависят от времени. В частности, интенсивность стационарного потока есть величина постоянная $\lambda(t) = \lambda$. К примеру, течение автомобилей на городском проспекте никак не считается неподвижным, однако данный поток возможно рассматривать стационарным в конкретный промежуток времени, например, в часы пик. Обращаем внимание на то, что в крайнем случае практическое количество автомобилей, проходящих в единицу времени (например, в каждую минуту), способен заметно отличаться друг от друга, однако среднее их количество регулярно и никак не будет зависеть от времени.

Поток событий принимает название потока без последствия, если для любых 2-ух непересекающихся участков времени τ_1 и τ_2 количество событий, оказывающихся на одном из них, не зависит от количества событий, оказывающихся на других. К примеру, поток пассажиров, входящих в метро, почти не имеет последствия. А, допустим, поток покупателей, отходящих с покупками от прилавка, уже имеет последствие (хотя бы потому, что интервал

времени между разными покупателями не способен быть меньше, нежели наименьший период обслуживания каждого из них).

Поток событий называется ординарным, в случае если вероятность попадания на небольшой (примитивный) участок времени Δt 2-ух и более событий пренебрежимо мала сопоставляя с вероятностью попадания 1-го события. Иначе говоря, поток событий ординарен, если события возникают в нем по отдельности, а никак не группами. В частности, поток поездов, приближающихся к станции, ординарен, а поток вагонов не ординарен.

Поток событий называется **простейшим** (или **стационарным пуассоновским**), если он одновременно стационарен, ординарен и не имеет последствия. Название «простейший» объясняется тем, что СМО с простейшими потоками имеет наиболее простое математическое описание. Обратим внимание, что регулярный поток не будет являться «простейшим», т.к. он обладает результатом: моменты появления событий в таком потоке жестко зафиксированы.

Простейший поток в качестве предельного возникает в теории случайных процессов столь же естественно, как в теории вероятностей нормальное распределение возникает в качестве предельного для суммы случайных величин: при наложении (суперпозиции) достаточно большого числа n независимых, стационарных и ординарных потоков (сравнимых между собой по интенсивностям λ_i $(i = 1,2,...,n)$) получается поток, близкий к простейшему, с интенсивностью λ, равной сумме интенсивностей входящих потоков, т.е.

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Рассмотрим на оси времени Ot (рис2) простейший поток событий как неограниченную последовательность случайных точек.

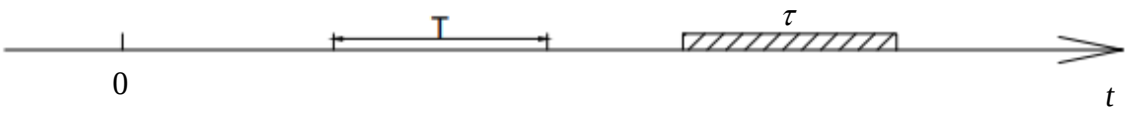


Рис. 2

Можно показать, что в простейшем потоке число m событий (точек), которые попадают на произвольный участок времени τ, распределяется по закону Пуассона:

$$P_m(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^m}{m!} e^{-\lambda\tau}$$

(1)

для которого математическое ожидание случайных величин равно ее дисперсии: $a = \sigma^2 = \lambda\tau$.

В частности, вероятность, что ни одно событие не произойдет за время τ $(m = 0)$, равна

$$P_0(\tau) = e^{-\lambda\tau}$$

(2)

Найдем распределение временного интервала T между случайными двумя соседними событиями в простейшем потоке.

Согласно (2) вероятность того, что ни одно из последующих событий не произойдет на участке времени длиной t, равна

$$P(\tau \geq t) = e^{-\lambda\tau}$$

(3)

а вероятность обратного события, т.е. функция распределения проивольной величины T, есть

$$F(\tau) = P(T < t) = 1 - e^{-\lambda\tau}$$

(4)

Плотность вероятности случайных величин является производной ее функции распределения (3), т.е.

$$\varphi(t) = F'(t) = \lambda e^{-\lambda\tau} \quad (5)$$

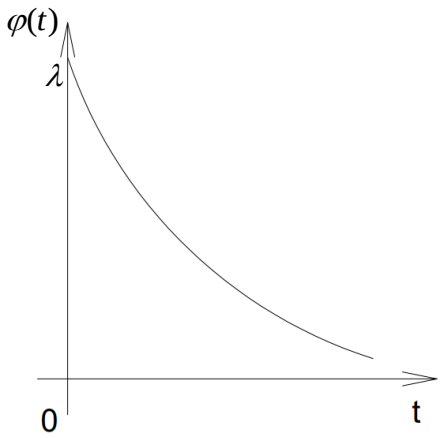


Рис. 3

Распределение, заданное плотностью вероятности (5) или функциями распределения (4), называется показательным (или экспоненциальным). Поэтому интервал времени двух соседних произвольных событий обладает показательным распределением, для которого математическое ожидание равно среднему квадратическому отклонению случайных величин и обратной величине интенсивности потока λ:

$$a = \sigma = \frac{1}{\lambda}. \quad (6)$$

Важнейшим свойством показательных распределений, присущим только показательным распределениям, является то, что если период распределения по закону показательных распределений уже продлился какое-то время τ, то это не повлияет на закон распределения оставшейся части промежутка ($T - \tau$): он будет точно таким же, как и закон распределения общего промежутка Т.

Иными словами, в интервале времени Т между двух последовательных соседних событий потока, обладающего показательным распределением, любая информация о времени проведения этого интервала не влияет на закон распределения оставшейся части. Это свойство показательного закона

является, в свою очередь, другой формулировкой для «отсутствия последействия» - основного свойства простейших потоков.

Для простейшего потока, интенсивность которого λ, вероятность попасть на элементарную (малую) часть времени Δt хоть одного события потока равна согласно (4)

$$P_{\Delta t} = P(T < \Delta t) = 1 - e^{-\lambda \Delta t} \approx \lambda \Delta t. \quad (7)$$

Заметим, что эта близкая формула, полученная заменой функции $e^{-\lambda \Delta t}$ двумя первыми членами ее разложения в ряд по степени Δt, тем точнее, чем меньше Δt.

4. УРАВНЕНИЯ КОЛМОГОРОВА. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ СОСТОЯНИЙ

Рассмотрим математическое описание марковского процесса с дискретными состояниями и постоянным временем на примере произвольного процесса из задачи 1, граф которого показан на рис. 1. Полагаем, что все перемещения системы из состояния S_i в S_j происходят под влиянием простейших потоков событий с показателями интенсивности λ_{ij} $(i, j = 0,1,2,3)$; таким образом, перемещение системы из состояния S_0 в S_1 будет происходить под влиянием потока отказов первого узла, а обратный переход из состояния S_1 в S_0 - под влиянием потока «окончаний ремонтов» первого узла и т.п.

Графическое состояние системы с проставленными у стрелок интенсивностями будем называть размеченными (рис. 1). Система S, которую мы рассматриваем, имеет четыре возможных состояния: S_0, S_1, S_2, S_3.

Вероятность $i-го$ состояния – это вероятность $p_i(t)$, что система будет в состоянии S_i в момент t. Похоже, что в любом моменте t сумма вероятностей всех состояний равна единице:

$$\sum_{i=0}^{3} p_i(t) = 1. \quad (8)$$

Посмотрим на систему в момент t и, задав небольшой интревал Δt, найдем вероятность $p_0(t+\Delta t)$ того, что система будет в состоянии S_0 в момент $(t+\Delta t)$. Это можно достичь различными ходами.

1. Система в момент t находилась в состоянии S_0 с вероятностью $p_0(t)$, а за время Δt не вышла из него.

Вывести систему из данного состояния (граф на рис. 1) можно суммарным простейшим потоком, интенсивность которого $(\lambda_{01}+\lambda_{02})$, т.е. в соответствии с (7) с вероятностью, которая примерно равна $(\lambda_{01}+\lambda_{02})\Delta t$. Вероятность, что система не выйдет из состояния S_0, равна $[1-(\lambda_{01}+\lambda_{02})\Delta t]$. Вероятность, что система находится в состоянии S_0 в первом способе (то есть, что она находится в состоянии S_0 и не выходит из него в течение времени Δt), равна по теореме умножения вероятностей

$$p_0(t)[1-(\lambda_{01}+\lambda_{02})\Delta t].$$

2. Система была в состоянии S_1 или S_2 в момент t с вероятностью $p_1(t)$ (или $p_2(t)$) и за время Δt перешла в состояние S_0.

С помощью потока, интенсивность которого λ_{10} (или λ_{20} - см. рис. 1) система перейдет в состояние S_0 при этом, вероятность будет приблизительно равна $\lambda_{10}\Delta t$ (или $\lambda_{20}\Delta t$). По этому способу, вероятность $p_1(t)_{10}\Delta t$ (или $p_2(t)\lambda_{20}\Delta t$) показывает что система будет находиться в состоянии S_0.

Применяя теорему сложения вероятностей, получим

$$p_0(t+\Delta t)=p_1(t)\lambda_{10}\Delta t+p_2(t)\lambda_{20}\Delta t+p_0(t)[1-(\lambda_{01}+\lambda_{02})\Delta t],$$

откуда

$$\frac{p_0(t+\Delta t)-p_0(t)}{\Delta t}=p_1(t)\lambda_{10}+p_2(t)\lambda_{20}-(\lambda_{01}+\lambda_{02})p_0(t).$$

Перейдя к пределу при $\Delta t\to 0$, получим производную $p_0'(t)$ (обозначим ее для простоты p_0') в левой части уравнения:

$$p_0'=\lambda_{10}p_1+\lambda_{20}p_2-(\lambda_{01}+\lambda_{02})p_0.$$

Получены дифференциальное уравнение первого порядка, то есть уравнение, в которых содержится как сама неизвестная функция, так и ее производная первая порядка.

Рассуждая по аналогии с другими состояниями системы S, получаем систему дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний:

$$\begin{cases} p_0' = \lambda_{10} p_1 + \lambda_{20} p_2 - (\lambda_{01} + \lambda_{02}) p_0, \\ p_1' = \lambda_{01} p_0 + \lambda_{31} p_3 - (\lambda_{10} + \lambda_{13}) p_1, \\ p_2' = \lambda_{02} p_0 + \lambda_{32} p_3 - (\lambda_{20} + \lambda_{23}) p_2, \\ p_3' = \lambda_{13} p_1 + \lambda_{23} p_2 - (\lambda_{31} + \lambda_{32}) p_3. \end{cases}$$

(9)

Попробуем сформулировать правило составления уравнений Колмогорова. Левая часть каждого из них представляет собой производную вероятности $i-го$ состояния. А правая часть каждого из них представляет собой сумму произведений вероятностей всех состояний на интенсивности соответствующих потоков событий, от которых отнимается суммарная интенсивность всех потоков, которые выводят систему из этого состояния, умноженная при этом на вероятность данного ($i-го$ состояния).

В системе (9) независимых уравнений на единицу меньше общей численности уравнений. Для решения системы нужно добавить уравнение (8).

Особенность дифференциального уравнения заключается в необходимости задавать так называемые начальные условия, то есть в этом случае, вероятность состояния системы в начальный момент $t = 0$. Так, к примеру, система уравнений (9) естественно решается, если в начальный момент оба узла исправны и система находится в состоянии S_0, то есть при изначальных условиях $p_0(0) = 1, p_1(0) = p_2(0) = p_3(0) = 0.$

Уравнения Колмогорова позволяют найти все возможные вероятности состояний как функции времени. Особый интерес представляют вероятности системы $p_i(t)$ в предельном, стационарном режиме, т.е. при $t \to \infty$, называемые **предельными** (или **финальными**) вероятностями состояний.

В теории случайных процессов доказывается, если количество состояний системы конечно и из каждого возможно (за конечное количество шагов) перейти в любое иное состояние, значит предельные вероятности существуют.

Предельная вероятность состояния S_i обладает четким смыслом: она показывает среднее относительное время нахождения системы в данном состоянии. К примеру, если есть предельная вероятность состояния S_0, то есть $p_0 = 0{,}5$, то значит, что в среднем система находится в состоянии S_0 половину времени.

Поскольку предельные вероятности постоянны, то, заменив в уравнениях Колмогорова их производные на нулевые значения, мы получим линейную алгебраическую систему уравнений, которые описывают стационарный режим. Для системы S с графом состояний, который изображен на рис. 1, такая система уравнений будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} (\lambda_{01} + \lambda_{02}) p_0 = \lambda_{10} p_1 + \lambda_{20} p_2, \\ (\lambda_{10} + \lambda_{13}) p_1 = \lambda_{01} p_0 + \lambda_{31} p_3, \\ (\lambda_{20} + \lambda_{23}) p_2 = \lambda_{02} p_0 + \lambda_{32} p_3, \\ (\lambda_{31} + \lambda_{32}) p_3 = \lambda_{13} p_1 + \lambda_{23} p_2. \end{cases}$$

(10)

Система (10) может быть составлена по размеченному графу состояний, при условии, что будем руководствоваться правилом, которое говорит о том, что слева в уравнениях находится предельная вероятность этого состояния p_i, умноженная на суммарную интенсивность всех потоков, которые ведут из этого состояния, а справа – сумма произведений интенсивностей всех потоков, входящих в $i-e$ состояние, умноженная на вероятности тех состояний, из которых данные потоки исходят.

Задача 2. Найти предельные вероятности для системы S из задачи (1), граф состояний которой приведен на рис. 1 при $\lambda_{01} = 1, \lambda_{02} = 2, \lambda_{10} = 2, \lambda_{13} = 2, \lambda_{20} = 3, \lambda_{23} = 1, \lambda_{31} = 3, \lambda_{32} = 2.$

Решение. Система алгебраических уравнений, которые описывают стационарный режим для данной системы, выглядит, как (10) или

$$\begin{cases} 3p_0 = 2p_1 + p_2, \\ 4p_1 = p_0 + 3p_3, \\ 4p_2 = 2p_0 + 2p_3, \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{cases}$$

(11)

Вместо одного «лишнего» уравнения системы (10) мы записали условие нормирования (8).

После решения системы (11), получаем $p_0 = 0{,}40, p_1 = 0{,}20, p_2 = 0{,}27, p_3 = 0{,}13$, то есть в предельном, стационарном режиме, в среднем 40% времени, система S будет в состоянии S_0 (где исправны оба узла), 20% - в состоянии S_1 (где второй узел работает, а первый находится в ремонте,), 27% - в состоянии S_2 (где первый узел работает, а второй ремонтируется,) и 13% времени – в состоянии S_3 (где оба узла ремонтируются).

Задача 3. Найти среднюю чистую прибыль от эксплуатации системы S в условиях задач 1 и 2 в стационарном режиме, если вы знаете, что в течение единицы времени работа первого и второго узлов, находящихся в исправном состоянии, приносит прибыль соответственно в 10 и 6 ден. ед., а ремонт их требует затрат соответственно в 4 и 2 ден. ед. Провести оценку экономической эффективности существующей возможности уменьшения в два раза среднего времени ремонта одного из двух узлов, если придется в два раза увеличить расходы на ремонт каждого узла (в единицу времени).

Решение. Из задачи 2: в среднем 1-ый узел работает исправно часть времени, которая высчитывается так: $p_0 + p_2 = 0{,}40 + 0{,}27 = 0{,}67$, а второй узел - $p_0 + p_1 = 0{,}40 + 0{,}20 = 0{,}60$. В это же время первый узел находится в ремонте в среднем часть времени, которая равна $p_1 + p_3 = 0{,}20 + 0{,}13 = 0{,}33$, а второй узел -

$p_2 + p_3 = 0{,}27 + 0{,}13 = 0{,}40$. Следовательно, средняя чистая прибыль в единицу времени от работы системы, то есть разность доходов и затрат, равна

$$Д = 0{,}67 \cdot 10 + 0{,}60 \cdot 6 - 0{,}33 \cdot 4 - 0{,}40 \cdot 2 = 8{,}18 \text{ ден. ед.}$$

Уменьшение среднего времени обслуживания каждого из узлов в два раза в соответствии с (6) означает увеличение в два раза интенсивности потока «окончание ремонта» каждого из кзлов, то есть $\lambda_{10} = 4, \lambda_{20} = 6, \lambda_{31} = 6, \lambda_{32} = 4$, и система (10), которая описывает стационарный режим системы S, совместно с нормировочным условием (8) принимает вид:

$$\begin{cases} 3p_0 = 4p_1 + 6p_2, \\ 6p_1 = p_0 + 6p_3, \\ 7p_2 = 2p_0 + 4p_3, \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{cases}$$

После решения системы, мы получили $p_0 = 0{,}60, p_1 = 0{,}15, p_2 = 0{,}20, p_3 = 0{,}05.$

Учитываем, что $p_0 + p_2 = 0{,}60 + 0{,}20 = 0{,}80, p_0 + p_1 = 0{,}60 + 0{,}15 = 0{,}75, p_1 + p_3 = 0{,}15 + 0{,}05 = 0{,}20,$ $p_2 + p_3 = 0{,}20 + 0{,}05 = 0{,}25$, а затраты на ремонт 1-го и 2-го узла составляют соответственно 8 и 4 ден. ед., вычисляем средний чистый доход в единицу времени:

$Д = 0{,}80 \cdot 10 + 0{,}75 \cdot 6 - 0{,}20 \cdot 8 - 0{,}25 \cdot 4 = 9{,}9$ ден. ед.

Согласно того, что $Д_1$ больше Д (примерно на 20%), можем прийти к выводу, что экономическая целесообразность ускорения ремонтных работо узлов очевидна.

5. ПРОЦЕСС ГИБЕЛИ И РАЗМНОЖЕНИЯ

В теории массового обслуживания распространен специальный класс случайных процессов – так называемый процесс гибели и размножения. Название процесса связано с некоторыми биологическими

задачами, в которых он представляет собой математическую моделью изменения численности популяций.

Граф состояний процесса гибели и размножения выглядит, как показано на рис. 4.

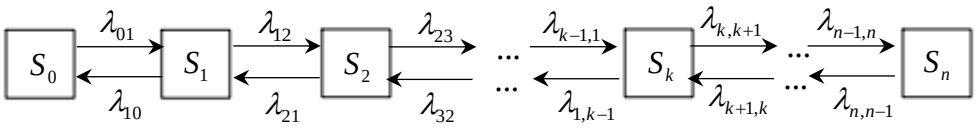


Рис. 4

Рассмотрим упорядоченное множество состояний системы $S_0, S_1, S_2, ..., S_k$. Переходы возможны только из состояния, где есть соседние номера, то есть из состояния S_k возможен переход только в либо состояние S_{k-1}, либо в состояние S_{k+1}.

Предполагаем, что все событийные потоки, которые переводят систему с помощью стрелок графа, являются простейшими с соответствующими интенсивностями $\lambda_{k,k+1}$ или $\lambda_{k+1,k}$.

Согласно графу, который представлен на рис. 4, составим и решим уравнения для предельных вероятностей состояний (существование которых вытекает из возможности перехода из каждого состояния в каждое другое и конечности числа состояний).

Согласно правилу составления подобных уравнений (см. 10) получаем: для состояния S_0

$$\lambda_{01} p_0 = \lambda_{10} p_1,$$

(12)

для состояния S_1

$(\lambda_{12} + \lambda_{10}) p_1 = \lambda_{01} p_0 + \lambda_{21} p_2$, которое с учетом (12) приводится к виду

$$\lambda_{12} p_1 = \lambda_{21} p_2.$$

(13)

Аналогичным образом, записав уравнения для предельных вероятностей иных состояний, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \lambda_{01} p_0 = \lambda_{10} p_1, \\ \lambda_{12} p_1 = \lambda_{21} p_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_{k-1,k} P_{k-1} = \lambda_{k,k-1} P_k, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_{n-1,n} P_{n-1} = \lambda_{n,n-1} P_n, \end{cases}$$

(14)

к ней добавляем нормировочное условие

$$p_0 + p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1.$$

(15)

Решив систему (14), (15), получаем

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}} + \ldots + \frac{\lambda_{n-1,n}\ldots\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{n,n-1}\ldots\lambda_{21}\lambda_{10}}\right)^{-1},$$

(16)

$$p_1 = \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} p_0,\ p_2 = \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}} p_0, \ldots, p_n = \frac{\lambda_{n-1,n}\ldots\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{n,n-1}\ldots\lambda_{21}\lambda_{10}} p_0.$$

(17)

Заметим, в формулах (17) для $p_1, p_2, \ldots, p_n$ коэффициенты при p_0 есть слагаемые, которые стоят после единицы в (16). Числители данных коэффициентов являются произведением всех интенсивностей, стоящих около стрелок, которые ведут слева направо до состояния $S_k (k = 1,2,\ldots,n)$, а знаменатели представляют собой произведение всех интенсивностей, которые стоят рядом со стрелками, ведущих справа налево из состояния S_k до S_0.

Список литературы:

1. Лабскер, Л.Г. Теория массового обслуживания в экономической сфере / Л.Г. Лабскер, Л.О. Бабешко. – М.: ЮНИТИ, 1998.
2. Нит, И.В. Линейное программирование. – М.: изд-во МГУ, 1978.
3. Солодовников, А.С. Математика в экономике. Ч. 1 / А.С. Солодовников, В.А. Бабайцев, А.В. Браилов. – М.: Финансы и статистик; ИНФРА-М, 2011.

4. Черчмен, У. Введение в исследование операций / У. Черчмен, Р. Акоф, Л. Арноф; пер. с англ. – М.: Наука, 1968.
5. Луценко Е.В., Печурина Е.К., Сергеев А.Э. Когнитивная ветеринария – ветеринария цифрового общества: дефиниция базовых понятий. Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. 2019. №152. С. 141-199.
6. Лаптев В.Н., Сергеев А.Э., Сергеев Э.А. Теоремы ПЛ. Чебышева о распределении простых чисел и некоторые проблемы, связанные с ними. Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. 2015. №113. С. 115-126.
7. Соколова И.В., Сергеев А.Э. Обучение творчеству в разных формах. Современные проблемы науки и образования. 2018. №4. С. 97.

List of literature:

1. Labsker, L.G. Theory of queuing in the economic sphere / L.G. Labsker, L.O. Babeshko. – M.: UNITY, 1998.
2. Nit, I.V. Linear programming. – M.: Publishing House of Moscow State University, 1978.
3. Solodovnikov, A.S. Mathematics in economics. Part 1 / A.S. Solodovnikov, V.A. Babaytsev, A.V. Brailov. – M.: Finance and Statistics; INFRA-M, 2011.
4. Cherchman, U. Introduction to Operations Research / U. Cherchman, R. Akof, L. Arnof; trans. from English – M.: Nauka, 1968.
5. Lutsenko E.V., Pechurina E.K., Sergeev A.E. Cognitive veterinary medicine – veterinary medicine of digital society: definition of basic concepts. Polythematic online electronic scientific journal of the Kuban State Agrarian University. 2019. No.152. pp. 141-199.
6. Laptev V.N., Sergeev A.E., Sergeev E.A. Theorems of PL. Chebyshev on the distribution of prime numbers and some problems related to them. Polythematic online electronic scientific journal of the Kuban State Agrarian University. 2015. No.113. pp. 115-126.

7. Sokolova I.V., Sergeev A.E. Teaching creativity in different forms. Modern problems of science and education. 2018. No. 4. p. 97.

© Бушуева В.О., Сергеев А.Э., 2022 Научно-образовательный журнал для студентов и преподавателей «StudNet» №7/2022

Для цитирования: Бушуева В.О., Сергеев А.Э. ТЕОРИЯ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ// Научно-образовательный журнал для студентов и преподавателей «StudNet» №7/2022